ISSN 0130-2221

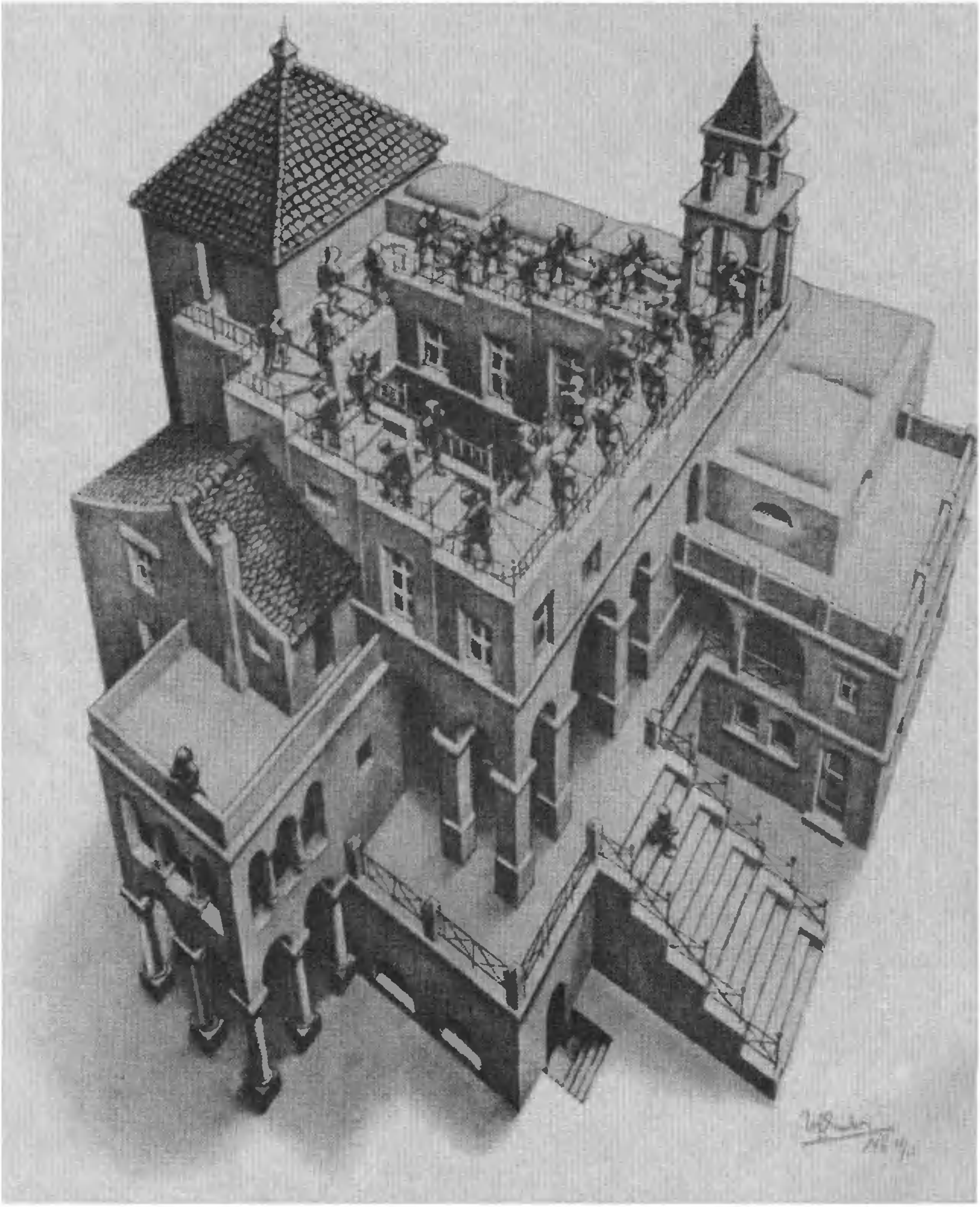
Квант

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Сплетение скрещивающихся прямых

1988



Квант

Основан в 1970 году

3 1988

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

Исаак Константинович Кикоин

(к 80-летию со дня рождения)

28 марта 1988 года исполняется восемьдесят лет со дня рождения основателя журнала «Квант» академика Исаака Константиновича Кикоина (умер 28 декабря 1984 года). Он был выдающимся советским физиком, дважды Героем Социалистического Труда, лауреатом Ленинской и Государственных премий. Ему принадлежит крупный вклад в решение ряда важных государственных проблем и прежде всего в ликвидацию монополии США на атомное оружие. И. К. Кикоин был ближайшим помощником руководителя этих работ академика И. В. Курчатова, одним из создателей Института атомной энергии и бессменным заместителем директора этого института.

И. К. Кикоин принадлежал к замечательной школе физиков, созданной академиком А. Ф. Иоффе. Из нее вышли крупнейшие советские физики — академики А. П. Александров, А. И. Алиханов, Л. А. Арцимович, П. Л. Капица, И. В. Курчатов, Г. В. Курдюмов, Н. Н. Семенов, Ю. Б. Харитон и другие ученые. Ученики Иоффе со студенческих лет активно включались в самостоятельную научную работу. Так было и с Исааком Константиновичем — научную работу он начал еще на втором курсе, а вскоре после окончания института выполнил серию работ в области физики твердого тела, получивших международное признание. Мы не будем здесь пытаться рассказать о его научных работах — их много и они весьма разнообразны. Остановимся лишь на его вкладе в отечественное просвещение.

Две очень важные проблемы занимали его ум многие годы. Научно-техническая революция непрерывно повышает требования к работнику. Автоматизация производства, рождение новых технологий, вторжение ЭВМ в различные сферы труда — таково веление времени. Надежно владеть столь сложной техникой может лишь человек с хорошей физико-математической подготовкой. А уровень преподавания этих наук в средней школе долгое время оставался недостаточным. Стремясь повысить его, И. К. Кикоин возглавил работу по совершенствованию программ и учебников по физике — нелегкий труд, за который крайне неохотно принимаются в наши дни крупные ученые.

Другая проблема, заботившая И. К. Кикоина,— поиск молодых талантов, от которых прямо зависит будущее нашей науки. Он был убежден в том, что народ наш талантлив, и самородков, подобных М. В. Ломоносову, у нас немало. Но как нам вовремя разглядеть, не упустить этих новых Ломоносовых, Менделеевых и Лобачевских? Надо было создать какой-то единый всесоюзный механизм, способствующий выявлению молодых талантов. Таким механизмом стали школьные олимпиады, и Исаак Константинович был председателем Центрального оргкомитета Всесоюзных физико-математических и химических олимпиад школьников.

И. К. Кикоин вместе с академиком А. Н. Колмогоровым организовал одну из первых в стране физико-математическую школу-интернат при Московском государственном университете. Они же положили начало первому в мире научно-популярному физико-математическому журналу для старших школьников «Квант» и «Библиотечке «Квант» и руководили ими до последних дней жизни.

И. К. Кикоин любил наш журнал и несмотря на свою огромную занятость всегда находил время для разработки тематики, поиска авторов и обсуждения статей. Он любил молодежь — надо было видеть, как загорались его глаза при встрече с талантливыми школьниками. Он безгранично любил физику, занятия ею были главным смыслом всей его жизни. Незадолго до смерти, выступая перед школьниками, он говорил: «...за долгую жизнь я не успел насладиться любимой своей физикой, не хватило мне времени, ясно вижу теперь — не хватило. А ведь не было ни одного дня в жизни, ни выходного, ни праздника, ни отпуска, когда бы я ею не занимался. Часто и сны вижу о физике». Таким мы запомнили этого замечательного человека и ученого.

В этом номере мы помещаем ряд материалов, посвященных памяти И. К. Кикоина.

В НАЧАЛЕ ПУТИ

Исаак Константинович Кикоин в 1923 году окончил среднюю школу № 1 им Л. М. Поземского в Пскове. Он всегда с благодарностью вспоминал годы учебы. Школа помогла ему найти свое призвание, привила любовь к физике — науке, которой он посвятил всю жизнь.
В феврале 1983 года шестиклассники псковской школы № 1 написали Исааку Константиновичу письмо с просьбой рассказать о годах учебы в школе, о себе, о своей работе. Исаак Константинович охотно откликнулся на просьбу. В разное время он написал школьникам четыре письма.
Выдержки из этих писем мы предлагаем вашему вниманию.

...Родился я 28 марта 1908 года в городе Жагаре (это в Литовской ССР).

...В семье придерживались твердого правила — приучать детей к посильной работе по дому, заботе о всех членах семьи; прививалась любовь к труду и ответственность за порученное дело.

На всю жизнь я сохранил к родителям благодарность за это. В своей жизни часто встречаясь с трудностями, вспоминал заветы моего отца.

В нашей семье детей учили писать и читать рано. В три года я уже умел читать и писать. От отца я ежедневно получал задание, за выполнение которого должен был давать ему отчет. Отец задавал мне и тексты, которые я должен был отвечать ему наизусть. Теперь я понимаю, что эти устные задания способствовали формированию у меня хорошей памяти, которую я сохранил на всю жизнь.

...В 1916 году мы переехали в г. Опочку Псковской губернии (теперь — области), где я поступил в школу.

Учиться мне было нетрудно, настолько, что, дважды «перескочив» через класс, я в 1921 году оказался в предпоследнем классе. Но в том же году моего отца перевели преподавателем математики в вашу школу, которая тогда называлась школой I-й и II-й ступени.

Естественно, что и я поступил учиться в ту же школу. Таким образом, последние два учебных года я провел в нашей с вами школе... Об этих моих школьных годах у меня остались самые светлые и приятные воспоминания.

Довольно рано, еще в младших классах, я усердно занимался математикой и физикой; вероятно, сказалось влияние отца.

В школе, в которой вы сейчас учитесь, создавались исключительно благоприятные условия для углубленного изучения мною этих предметов.

Математику у нас преподавал первоклассный педагог Дмитрий Михайлович Ляпунов, которому я очень благодарен за полученные от него знания.

Очень мне повезло и с физикой.

Мне доверили заведовать физическим кабинетом школы и вместе с моим товарищем по школе — заведовать школьной библиотекой (и то и другое было моей общественной работой).

...Физический кабинет был превосходно оснащен приборами, и я имел возможность производить множество экспериментов. Правда, многие приборы нуждались в ремонте, и я обогатился опытом изготовления нужных для этого деталей.

Школьная библиотека была на редкость богата, в ней содержалось несколько десятков тысяч томов. Много там было книг по физике и математике.

...Почти каждый день я с удовольствием проводил время за занятиями в библио-

Здание школы в г. Пскове, в которой учился И. К. Кикоин (фотография начала века).

теке и физическом кабинете с утра и до позднего вечера. В результате я приобрел довольно основательные познания по обеим дисциплинам, значительно более обширные, чем требовалось школьной программой.

...Школу я окончил в пятнадцатилетнем возрасте. К этому времени я уже точно решил, в каком высшем учебном заведении буду продолжать свое образование. Дело в том, что незадолго до этого в одной из центральных газет появилась статья выдающегося физика академика Абрама Федоровича Иоффе об основанном им физико-механическом факультете при Ленинградском политехническом институте им. М. И. Калинина. Прочитав эту статью, я твердо решил поступить только на этот факультет. Но... в вузы принимали молодежь начиная с семнадцатилетнего возраста. Поэтому я решил поступить в Псковское землемерное училище — одно из пяти таких училищ, существовавших в стране. Это было лучшее из средне-технических заведений Пскова. К сожалению, прекрасного здания, в котором находилось училище, сейчас нет. Я легко сдал экзамены и был принят на третий курс училища (потом оно стало называться Землеустроительным техникумом). Одна из причин, почему я выбрал это училище, заключалась в том, что при сравнительно значительной безработице, которая тогда существовала в стране, землемеров не хватало.

Я не стану останавливаться на годах, проведенных в этом училище, а ограничусь только указанием на то, что моя неплохая физико-математическая подготовка помогла мне окончить училище с высшими оценками.

...Мне тогда уже исполнилось 17 лет, и я имел право поступать в выбранный мной Политехнический институт на физико-механический факультет. ...Может быть, вам будет небезынтересно узнать, как проходили у меня вступительные экзамены на этот факультет. В те времена правила сдачи экзаменов для поступления в вузы часто менялись. В частности, в 1925 году для поступающих в московские и ленинградские вузы правилами было предусмотрено, что лица, окончившие в этом году средние школы или средние технические учебные заведения и желающие в этом же году поступить в вузы, экзамены сдавали в своих областных или губернских городах. Лица же, окончившие средние учебные заведения до 1925 года, экзаменовались в приемных комиссиях самих вузов (как и теперь).

Таким образом, я должен был сдавать экзамены у себя в Пскове. Для Псковской губернии на выбранный мною физико-механический факультет было выделено два места.

Желающих поступить на этот факультет из Псковской губернии было несколько десятков человек. ...Приемная комиссия состояла из учителей Пскова. Экзамены по физике, математике, химии, русскому языку и политграмоте (теперь обществоведение) я сдал «весьма удовлетворительно», т. е., по-теперешнему, на пять. Мне объявили, что я зачислен студентом физико-механического факультета Ленинградского политехнического института. Председатель комиссии поздравляет: «Все в порядке. Можете ехать в Ленинград. Вы зачислены». Все документы, включая удостоверение об окончании школы и аттестат об окончании Землемерного училища, комиссия отправила в Ленинградский политехнический институт.

Одна маленькая деталь: в момент, когда я сдавал экзамены (июль месяц), аттестаты оканчивающим Землемерное училище еще печатались в типографии, поэтому мне перед экзаменами для представления в приемную комиссию выдали дубликат аттестата, напечатанный на пишущей машинке, точно с тем же текстом и с подлинными подписями и гербовой печатью.

...К началу учебного года я приезжаю в Ленинград. Прихожу на свой факультет и читаю списки принятых студентов. Моей фамилии нет!

...Назавтра утром (это было 28 августа) я направился в канцелярию для выяснения причины этого явного недоразумения. Когда я назвал свою фамилию заведующему канцелярией, он распорядился... принести мое личное дело. Он стал его перелистывать и заявил: «Вы не приняты, потому что не явились на экзамены». На мое объяснение, что я экзамены сдавал в Пскове губернской приемной комиссии, последовал ответ: «Вы ведь окончили школу в 1923 году, а не в этом, 1925 году, и согласно существующим правилам должны были экзаменоваться здесь — в институте». В ответ на это я сказал, что в этом году окончил Псковское землемерное училище. На это последовал удививший меня ответ: «Об этом нам не известно ничего». Я стал утверждать, что в моем личном деле должен находиться аттестат об окончании в Пскове Землемерного училища. Перелистав снова личное дело и найдя этот аттестат, он категорически заявил: «Поскольку ваш аттестат напечатан не в типографии, он не может служить для нас официальным документом». Я ему объяснил причину... и показал типографский аттестат, выданный мне на руки, подчеркнув, что тексты, печати и подписи в обоих документах в точности совпадают.

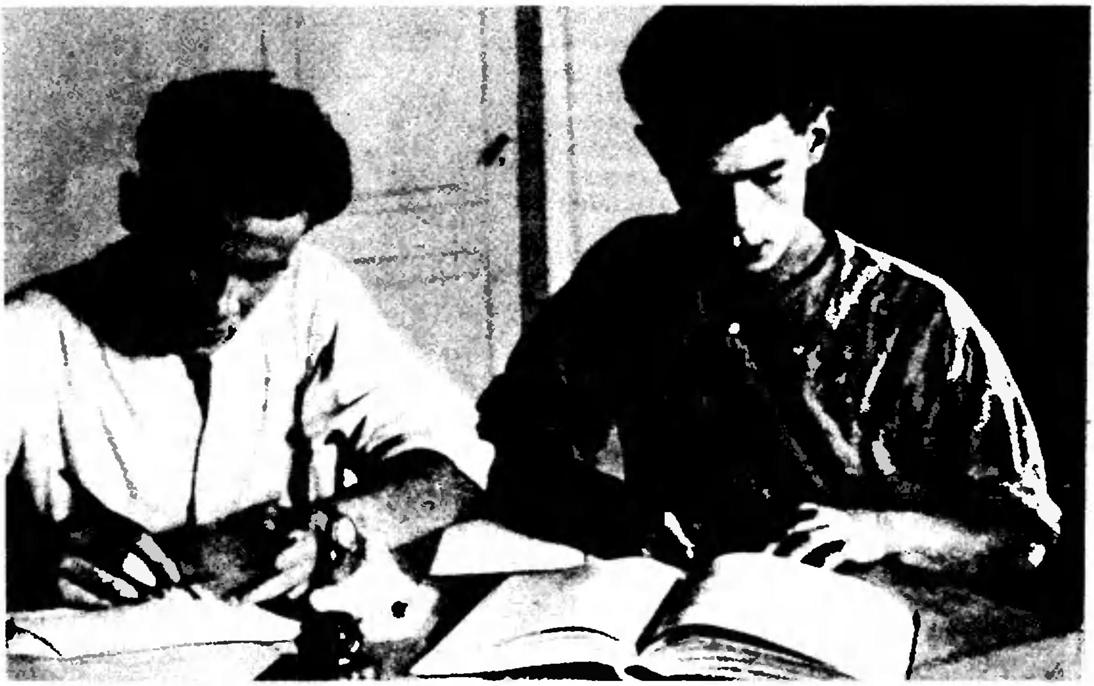
Все это не произвело на него никакого впечатления, и он заявил, что теперь уже поздно и мое место занято.

Родители И. К. Кикоина — Буня Израилевна и Константин Исаакович.

Дом в г. Пскове, где жила семья Кикоиных. Отсюда в 1925 году И. К. Кикоин уехал учиться в Ленинград.

И. К. Кикоин с сестрой Еленой (1925).

...Выручила меня симпатичная девушка — технический секретарь приемной комиссии. Внимательно просмотрев мое дело, она поняла, что заведующий канцелярией допустил ошибку, в которой признаться и исправить ее не хочет. К счастью, в институте еще проходили



И. К. Кикоин с братом Абрамом (1932).

дополнительные приемные экзамены, которые заканчивались 29 августа... Девушка посоветовала мне написать заявление не о зачислении меня студентом, а о разрешении заново сдать приемные экзамены. Я такое заявление написал. Она сама отнесла его председателю приемной комиссии и через некоторое время принесла мое заявление с положительной резолюцией. Посмотрев на меня, она с сомнением спросила, действительно ли я смогу сдать в течение оставшихся нескольких часов все экзамены — их было пять!

...Я прямиком направился в первую из указанных аудиторий. Там шел экзамен по математике. За столом сидел солидный мужчина в морской форме. Позже я узнал, что это был известный профессор Р. О. Кузьмин, читавший лекции по высшей математике на кораблестроительном факультете (поэтому он и носил морскую форму). Перед ним на столе лежал задачник Бычкова по математике. Профессор раскрыл наугад задачник и предложил решить два квадратных уравнения с двумя неизвестными. Я посмотрел задачу и тут же, не решая, сказал ему ответ. Он сверился с ответом и спросил, как я так быстро решил задачу. Я ему ответил, что задача простая и решается в уме. Должен вам сознаться, что это была неправда. Дело объяснялось тем, что у меня хорошая память, а все задачи этого учебника я перерешал... и запомнил ответы.

Тогда профессор Кузьмин предложил мне другую задачу — три квадратных уравнения с тремя неизвестными. Я снова дал ему ответы, не решая эту систему, сказав, что такая задача легко решается в уме. Это, конечно, тоже было неправдой. Тогда он, закрыв задачник, предложил мне вычислить логарифм числа, что я и сделал успешно, нормальным путем. Задав мне несколько устных вопросов по геометрии, на которые я дал правильные ответы, он спросил, где я учился, и затем поставил мне оценку «ВУ» (весьма удовлетворительно)... Экзамен по математике продолжался примерно минут пятнадцать. Оттуда я бегом отправился в аудиторию, где проходил экзамен по физике. Этот экзамен занял 15—20 минут, и я получил также оценку «ВУ».

Экзамены по химии и политграмоте прошли тоже успешно.

Остался последний экзамен по литературе. На этот экзамен собрали всех экзаменующихся в одну аудиторию. Экзамен принимали две школьные учительницы (в Политехническом институте не было такого предмета). Они написали на доске темы сочинений на выбор экзаменующегося. По мере того как они писали названия тем, мое настроение начало портиться. Темы были по литературным произведениям, которые я либо не читал, либо плохо помнил... Спасительной оказалась последняя тема — седьмая по счету. Тема называлась «Типы крестьян по сочинению Н. В. Гоголя «Мертвые души».

...Произведения Н. В. Гоголя я любил, много раз перечитывал и интересовался всем, что было написано о самом Гоголе и его творчестве. На этой теме я и остановил свой выбор. Когда я написал примерно уже страниц двенадцать и, как говорится, только «расписался», раздался голос учительницы — время окончилось, пора сдавать работы. Когда я сказал, что не успел еще закончить сочинение, она спросила: «Сколько вы написали?». Услышав, что я написал около 12 страниц, она сказала, что этого вполне достаточно, и добавила: «Нам не так важно, что вы написали, а как написали». Насколько я потом понял, их интересовала грамотность поступающих.

Назавтра я был зачислен студентом физико-механического факультета Политехнического института.

Много лет спустя мой учитель академик А. Ф. Иоффе, будучи у меня дома в гостях уже в Москве, рассказал моим домашним, что когда-то ему как декану факультета «все уши прожужжали» о том, что на его факультете появился студент, который в течение одного дня сдал все вступительные экзамены в институт и при этом «весьма удовлетворительно».

Так начались самые счастливые дни моей юности.

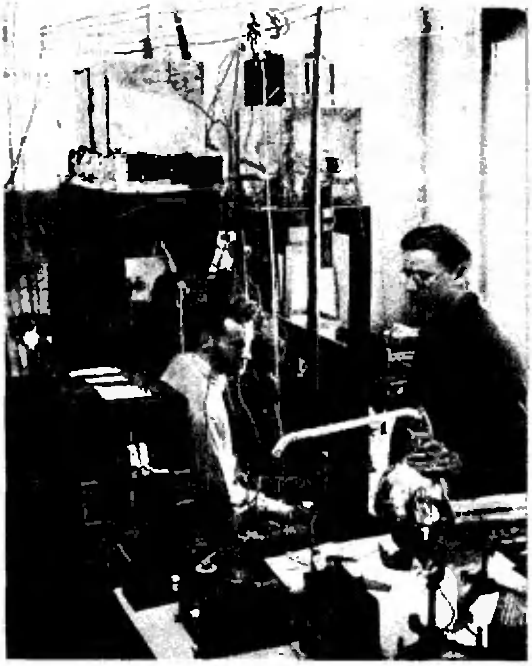
НА ПОРОГЕ БОЛЬШОЙ НАУКИ

В 1977 году на страницах «Кванта» академик И. К. Кикоин рассказывал об основных этапах становления советской физики. В этом рассказе много места было уделено Ленинградскому физико-техническому институту (ЛФТИ), который в конце двадцатых годов стал одним из основных центров физической науки в СССР.
Будучи студентом-второкурсником Ленинградского политехнического института, Исаак Константинович начал работать в ЛФТИ. Мы предлагаем нашим читателям отрывки из статьи И. К. Кикоина «Как создавалась советская физика» («Квант», 1977, № 10—12), в которых он делится своими воспоминаниями о студенческой жизни, тесно связанной с ЛФТИ.

...Напротив нашего института, через улицу, которая называлась «Дорога в Сосновку», находился Ленинградский физико-технический институт (тогда он назывался Физико-технический рентгеновский институт). Директором его был академик А. Ф. Иоффе.... Основную массу сотрудников составляли молодые люди, начавшие работу, будучи студентами физико-механического факультета.

...Отбирались студенты на работу в институт таким способом. Преподаватели факультета — сотрудники института, в том числе и студенты старших курсов, которые руководили лабораторными работами студентов, имели указания А. Ф. Иоффе присматриваться к студентам, которые проявляют интерес и способности к экспериментальной физике, и приглашать их на работу в Физико-технический институт. В 1927 году, будучи студентом второго курса, я был приглашен на работу в Физико-технический институт. Там молодежь сразу приобщалась к современной науке. С нами не очень нянчились и не считались с тем, что у себя на факультете мы еще чего-то «не проходили». На научных семинарах, которые происходили регулярно по пятницам, с 5 до 7 вечера, разбирались научные работы, только что сделанные сотрудниками института или опубликованные в зарубежных журналах. Мы принимали участие в работе семинара, должны были слушать и понимать, о чем идет речь, а если не понимали, то спрашивать. В первое время мы даже не решались спрашивать, потому что не понимали ничего. Но довольно быстро понимание наступило, по-видимому, потому, что мы привыкли к стилю изложения и сами много читали.

...Когда я начал работать в Ленинградском физико-техническом институте, под влиянием лекций и семинаров Я. И. Френкеля, который рассказывал нам о современных идеях в физике металлов, я решил заняться вопросами именно этой области физики и, прежде всего, эффектом Холла. Я решил проверить, возникает ли эффект Холла в жидких металлах. Этим вопросом ранее, в начале века, занимались такие корифеи науки, как Нернст, Друде. Просмотрев имевшуюся по этому вопросу литературу, я пришел к выводу, что выбор жидких металлов в проводившихся ранее опытах был сделан неудачно. В первых



И. К. Кикоин и М. М. Носков во время исследования фотоэлектромагнитного эффекта (1933). Теперь это явление называют «эффектом Кикоина — Носкова».

экспериментах в качестве образца выбирали ртуть, потому что при комнатной температуре она всегда в жидком состоянии. Эффекта Холла в ней не обнаружили. Как потом оказалось, и в твердой ртути этот эффект очень мал, и его трудно измерять. Проводились опыты и с висмутом. Висмут казался очень подходящим образцом, поскольку в твердом висмуте ЭДС Холла на несколько порядков больше, чем в других металлах: в «обычных» металлах она измеряется в микровольтах, а в висмуте — в милливольтах. Однако в жидком висмуте эффекта не обнаружили. Теперь известно, что аномально большой эффект Холла в твердом висмуте связан с особенностями его кристаллической структуры. В жидком состоянии эта структура пропадает. А экспериментаторы, собиравшиеся измерить большой эффект, увидев, что он в 1000 раз меньше ожидаемого, пришли к выводу, что эффекта просто нет.

Я решил взять в качестве образца металл, который является наиболее простым. Это — щелочной металл. Щелочные металлы хороши тем, что у них практически все теоретические предсказания относительно их свойств хорошо оправдываются в опытах. Я выбрал для эксперимента сплав натрия с калием, который при известной концентрации компонент становится жидким уже при комнатной температуре.

Мне представлялось, что отрицательные результаты в предыдущих опытах связаны не только с неудачным выбором образцов, но и с недостаточно точной постановкой эксперимента. Дело в том, что когда через жидкий металл, находящийся в магнитном поле, пропускают ток, то со стороны магнитного поля на металл начинают действовать силы, которые приводят к смещению отдельных слоев жидкого металла друг относительно друга. (В твердом металле этого перемещения слоев, естественно, нет.) В результате возникают вихревые токи, которые «смазывают» эффект Холла в жидком металле. Так что необходимо если не свести на нет, то максимально уменьшить влияние этих «паразитных» токов. Для этого мы взяли образец в виде тонкого слоя жидкого металла. Тщательно проведенные измерения обнаружили наличие эффекта Холла. Года через полтора вышла работа Зоммерфельда, в которой рассказывалось об опытах, подтверждающих современную теорию металлов. Ссылался Зоммерфельд и на наш опыт. По правде говоря, я был необыкновенно горд собой — такой авторитет, как Зоммерфельд, оценил мою работу.

...В 1930 году, когда я только что окончил институт и получил звание инженера-физика, по рекомендации А. Ф. Иоффе меня направили в командировку в Германию, чтобы ознакомиться с физическими лабораториями Запада. Я пробыл в Германии около трех месяцев и смог познакомиться с работами физических лабораторий Лейпцига, Мюнхена, Гамбурга. И нужно сказать, что я был очень удовлетворен, когда убедился, что уровень наших физиков, в частности мой собственный уровень, был ничуть не ниже уровня физиков, с которыми я встречался в лабораториях за рубежом...

Находясь в командировке, я около месяца работал в лаборатории в Мюнхене, в бывшей лаборатории Рентгена. Там работали и университетские докторанты (так назывались у них заканчивающие университет студенты, которые готовят дипломные работы). Однажды я заметил, что докторанты, готовясь к выпускным экзаменам, читают книгу Я. И. Френкеля «Курс электродинамики», изданную на немецком языке. Я спросил: «А кому вы сдаете экзамены?», они ответили: «Зоммерфельду». Тому самому Зоммерфельду, крупнейшему теоретику мирового класса, про которого у нас, когда мы были студентами, ходила поговорка «нет Бора кроме

Бора, и Зоммерфельд его пророк». Я знал, что имеется пятитомный курс физики самого Зоммерфельда, и спросил, почему докторанты учат электродинамику не по Зоммерфельду, а по Френкелю. А потому, ответили они, что Зоммерфельд сказал, что он будет принимать экзамены только по курсу Френкеля, поскольку лучшего курса в мире сейчас нет. Когда я сказал, что лично знаком с Френкелем, то почувствовал, что мой авторитет в их глазах резко возрос. А я испытал чувство истинной гордости за наших советских физиков, заслуживших широкое признание в среде крупнейших теоретиков мира.

ПЕРВАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ПРЕМИЯ

Исаак Константинович Кикоин был удостоен нескольких Государственных премий. Некоторые работы, за которые ему присуждались премии, не были опубликованы в печати из-за их секретности. Не всегда сообщалось о самом факте присуждения премии. В течение ряда лет — это были годы самой напряженной работы — даже имя И. К. Кикоина не упоминалось в печати, в научных журналах не появлялись его статьи.
Однако самую первую Государственную премию И. К. Кикоин и его сотрудники С. В. Губарь и В. С. Обухов получили за работу, которая была опубликована, и о присуждении премии было сообщено в печати, по радио. Об этой работе рассказывает профессор А. К. Кикоин.

Это произошло в далеком теперь 1942 году, в самый разгар Великой Отечественной войны.

Работа была опубликована в журнале «Вестник электропромышленности» под заглавием «Новая система электроизмерительной аппаратуры для измерения постоянных токов большой силы». Что это за новая система? Почему она понадобилась? И почему измерительные приборы этой системы оказались столь важными, что работа была тогда же, в условиях войны, удостоена Государственной премии? Ведь измерительные приборы — это не танки, не пушки и не мины или бомбы!

Зачем нужны большие токи?

В современной технике чаще всего используется переменный ток и притом сравнительно небольшой силы — обычно в несколько ампер, реже — в десятки ампер, еще реже — в сотни ампер. Есть, однако, отрасли техники, где требуется непременно постоянный ток, причем очень большой силы. Это прежде всего металлургия цветных металлов. Такой важный металл как алюминий получают исключительно методом электролиза, и при этом через расплавленную смесь глинозема (Al_2O_3) и криолита ($Na_3[AlF_6]$) проходит постоянный электрический ток во много десятков тысяч ампер (в настоящее время до 150 кА). Даже в то время, к которому относится описываемая работа, при электролизе алюминия использовался ток до 70 кА.

Перед самой войной на Урале строился и вводился в эксплуатацию Уральский алюминиевый завод, самый большой в стране. Были и два других завода — один в Ленинградской области, а второй на Украине. Именно на Уральском заводе электролитические ванны были рассчитаны на токи до 75 кА. Естественно, для управления процессом производства алюминия необходимо было иметь возможность измерять эти токи.

Как измеряют большие токи?

Всем известно, как измеряют величины, характеризующие электрический ток (силу тока, напряжение, мощность, энергию). В те времена использовались главным образом приборы магнитоэлектрической системы; существовали и приборы, использующие нагрев проволоки, по которой проходит измеряемый ток (тепловые приборы). Во всех случаях токонесущие части приборов сделаны из тонких проволок, по которым нельзя пропускать слишком большие токи. А если требуется измерять сильные токи, то приборы шунтируются — параллельно токонесущей части измерительного прибора включают сопротивление (шунт), в определенное число раз меньшее сопротивления токонесущей части прибора. Если, например, в цепи течет ток в 100 А, а прибор рассчитан на измерения тока не больше 1 А, то сопротивление шунта должно быть в 99 раз меньше, чем сопротивление катушки в приборе. Тогда через прибор будет идти ток 1 А, а через шунт — 99 А. Чем больше измеряемый ток, тем меньше должно быть сопротивление шунта Добиваются этого увеличением площади поперечного сечения проводника-шунта.

Пока идет речь об измерении десятков и даже немногих сотен ампер, проблем с шунтами не возникает. Однако, когда требуется измерять токи в тысячи ампер, шунт становится весьма обременительной частью прибора. Так, шунт к прибору для измерения тока 10 000 А имел массу 35 кг. На практике с увеличением измеряемого тока масса шунта росла пропорционально квадрату силы тока. Значит, если нужно измерять ток в 50 кА, масса шунта должна быть 875 кг, а при токе в 100 кА — 3,5 тонны!

Добавим к этому, что измерительные приборы с шунтами для электролизных заводов у нас в стране не производились. Закупали их в Германии. Но даже за рубежом нельзя было купить необходимые для Уральского завода килоамперметры на 75 кА. Положение особенно обострилось с началом войны. Два алюминиевых завода в Европейской части СССР оказались на оккупированной территории. Остался единственный алюминиевый завод на Урале, пустить который нельзя было без измерительных приборов.

Это и побудило И. К. Кикоина заняться столь важной проблемой. В ее решении был заинтересован не только Уральский, но и другие электролизные заводы, например, Соликамский калийный комбинат. У автора этих строк хранится переписка с этим заводом, из которой видно, насколько важными для него были быстрейшая разработка и изготовление новых приборов.

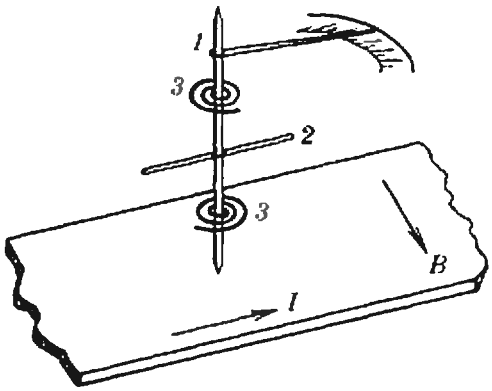
Какие же приборы были предложены взамен шунтовых?

Амперметр, через который не проходит ток

Идея измерений очень больших постоянных токов, предложенная И. К. Кикоиным была исключительно проста. Вокруг всякого постоянного электрического тока существует постоянное же магнитное поле. Значение индукции магнитного поля в точке, находящейся на заданном расстоянии от проводника с током, зависит только от силы тока. Эта зависимость хорошо известна для магнитного поля вокруг проводника цилиндрической формы. В этом случае индукция поля обратно пропорциональна расстоянию от проводника и прямо пропорциональна силе тока.

На электролизных заводах токонесущие провода — это медные шины прямоугольного сечения, да еще сложенные вместе. И в этом случае индукция магнитного поля определяется током в шинах, но зависимость ее от силы тока несколько сложнее — она немного отклоняется от линейной. Это, однако, не мешает оценивать силу тока по индукции магнитного поля. Саму индукцию предлагалось оценивать самым простым способом — по отклонению магнитной стрелки.

Как известно, на магнитную стрелку (намагниченный стержень) в однородном магнитном поле действует пара сил, вращающий момент которых отличен от нуля. В результате действия этих сил стрелка в конце концов устанавливается вдоль линий индукции магнитного поля. Но можно сделать так, чтобы стрелка не устанавливалась вдоль линий индукции, а поворачивалась на угол, пропорциональный току. Для этого на стрелку должна действовать сила, момент которой «разворачивает» стре-



лку в противоположном направлении и растет с увеличением угла поворота. Такой противодействующий момент может быть создан, например, подходящей пружиной.

Схема прибора, сконструированного И. К. Кикоиным и его сотрудниками, показана на рисунке.

На оси *1*, установленной на агатовых подшипниках (для уменьшения трения), укреплен намагниченный стержень *2*. Противодействующий момент создается спиральными пружинами *3*. Ось со скрепленным с ней стержнем снабжена стрелкой, скользящей по циферблату, на котором нанесено 100 делений. Прибор был переносным и просто устанавливался на токонесущей шине в любом месте. Расстояние от шины до намагниченного стержня всегда одно и то же (несколько сантиметров), так что угол поворота стрелки зависит только от силы тока. Опыт показал, что небольшая нелинейность зависимости угла поворота от силы тока наблюдается только при самых больших силах тока (начиная от 84-го деления шкалы). Особую трудность представляла собой градуировка прибора. Ведь сравнивать его показания с эталонным прибором, как это обычно делается, было невозможно — таких приборов просто не существовало. Поэтому специально разработали метод градуировки, основанный на явлении электромагнитной индукции.

Кроме переносного килоамперметра, для измерения тока на отдельных электролитических ваннах был разработан стационарный прибор для измерения тока в главной цепи с передачей его показаний на пульт управления. Для этого нужно было «преобразовать» угол поворота в электрический сигнал, который и передавался на пульт.

Хотя погрешность измерения силы тока была довольно большой — 3 %, но для технических измерений она была вполне приемлемой и удовлетворяла заказчиков.

Кроме килоамперметров, И. К. Кикоиным и сотрудниками были разработаны приборы для измерения мощности (ваттметры), счетчики энергии и счетчики ампер-часов (электрического заряда), также необходимые электролизным заводам, — все рассчитанные на токи порядка 70 кА. Следует отметить, что не только была предложена идея приборов и разработана их конструкция, но все эти приборы были изготовлены в мастерских института физики металлов в Свердловске, где в то время работал И. К. Кикоин, и поставлены в нужном количестве электролизным заводам на Урале и в соседних районах. Это и позволило Уральскому алюминиевому заводу начать выдачу продукции — важнейшего металла авиационной промышленности.

Таким образом, работа, начатая еще в 1939 году, оказалась в 1942 году как нельзя более кстати для жизненно важной отрасли оборонной промышленности. В день 25-й годовщины Великой Октябрьской социалистической революции было объявлено о присуждении И. К. Кикоину, С. В. Губарю и В. С. Обухову Государственной премии. Это была первая Государственная премия, присужденная физикам Урала.

СПЛЕТЕНИЯ СКРЕЩИВАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ

О. Я. ВИРО,
Ю. В. ДРОБОТУХИНА

Заголовок этой статьи кажется несколько странным, не правда ли? Сплетают что-то гибкое. А тут — прямые! В заголовке, правда, говорится не о процессе сплетения, а, скорее, о результате. Но могут ли быть сплетены, зацеплены друг за друга, хитро расположены по отношению друг к другу скрещивающиеся прямые? На первый взгляд кажется, что не могут. Впрочем, откуда у нас это впечатление? В повседневной жизни мы никогда не имеем дела с чем-либо действительно похожим на прямые: не так существенно то, что не бывает предметов бесконечно тонких — толщиной мы готовы пренебречь,— существеннее отсутствие неограниченно протяженных объектов. Даже лучи света — эти образцы прямолинейности,— рассеиваясь и слабея, на большом расстоянии становятся неощутимыми. На практике приходится иметь дело лишь с отрезками прямых. Любой набор непересекающихся друг с другом отрезков можно, двигая отрезки так, чтобы они все время оставались непересекающимися, расположить как попало. В этом нас убеждает опыт, да и доказать это не трудно. Прямые мы изображаем их отрезками. Потому-то нам и кажется, что прямые не могут быть сплетены. Ну а как на самом деле?

Прежде всего, давайте более точно сформулируем интересующие нас вопросы. Первый вопрос: могут ли несколько непересекающихся прямых располагаться по-разному? А что значит «располагаться по-разному»? Сейчас нас не интересуют ни углы, ни расстояния между прямыми. Будем считать, что при движении прямых, в процессе которого они остаются непересекающимися, взаимное расположение их не изменяется. Если же один набор прямых нельзя получить из другого таким движением, то условимся считать, что прямые в этих наборах *расположены по-разному*.

Самыми легкими для нашего пространственного воображения являются наборы параллельных прямых. Ясно, что любые два таких набора, состоящие из одинакового числа прямых, устроены одинаково. Действительно, поворачивая все пространство с «вмороженными» в него прямыми одного набора, можно сделать их параллельными прямым другого набора, после чего, передвигая по очереди прямые первого набора так, чтобы они не наезжали друг на друга и оставались параллельными, легко совместить их с прямыми второго набора.

Обратимся теперь к произвольным наборам прямых. Можно ли произвольный набор непересекающихся прямых превратить в набор параллельных прямых, как бы «причесать» его? У этой задачи есть простое и неожиданное решение. Попробуйте ответить, не заглядывая в последующий текст. Подумали? Ну, тогда читайте дальше. Ответ — всегда можно. Докажем это.

Возьмем произвольный набор непересекающихся прямых. Выберем две параллельные друг другу плоскости, не параллельные ни одной прямой нашего набора. Зафиксируем точки пересечения первой плоскости с прямыми: поставим там шарниры. Точки пересечения второй плоскости с прямыми тоже зафиксируем, но так, чтобы они были неподвижны только на плоскости, а по прямым могли бы скользить. Другими словами, ограничимся тем, что просверлим во второй плоскости маленькие отверстия в местах ее пересечения с прямыми. Будем теперь отодвигать вторую плоскость от первой в перпендикулярном им обеим направлении. При этом прямые будут поворачиваться. Углы, которые они образуют с плоскостями, будут увеличиваться, и, если плоскость за конечное время унесется на бесконечность, они все достигнут 90°, т. е. прямые станут параллельными. Это «причесывание» набора прямых в более привычной для геометрии манере описывается так: мы подвергаем пространство растяжению от первой плоскости в перпендикулярном ей направлении с коэффициентом растяжения, быстро возрастающим и за конечное время достигающим бесконечности. Прямые при этом поворачиваются вокруг точек пересечения с этой плоскостью и в пределе становятся перпендикулярными ей.

Итак, сплетений непересекающихся прямых не бывает, все наборы непересекающихся прямых устроены одинаково — так же, как параллельные. Но в заголовке речь шла о скрещивающихся прямых, так что наборы параллельных прямых были исключены. На то имеются серьезные причины. Параллельные прямые очень близки к пересекающимся: повернув одну из двух параллельных прямых на сколь угодно малый угол, можно сделать эти прямые пересекающимися. А для скрещивающихся прямых это не так.

Поскольку нам разонравились параллельные прямые, придется пересмотреть представление о том, какие наборы прямых устроены одинаково, а какие — нет. Будем считать, что если при движении прямых они все время остаются скрещивающимися, то их взаимное расположение не изменяется. В дальнейшем нам придется много раз рассматривать такие движения, поэтому удобно будет для их обозначения иметь специальное слово. Будем называть их *изотопиями**). Если один набор прямых нельзя получить из другого изотопией, то условимся считать, что прямые в этих наборах расположены по-разному. О таких наборах будем говорить, что они *не изотопны*.

Сложность вопроса об изотопности двух наборов прямых зависит, прежде всего, от числа прямых в этих наборах. Чем больше прямых, тем, по-видимому, хитрее может оказаться изотопия, соединяющая эти наборы. Вначале обратимся к самой легкой ситуации.

Две прямые

Возьмем любые две пары скрещивающихся прямых и попытаемся решить задачу об их изотопности. Слово «задача» звучит, пожалуй, слишком торжественно, ибо изотопность здесь совершенно очевидна. Тем не менее, всмотримся в доказательство.

Поворотом вокруг общих перпендикуляров, соединяющих прямые наших пар, сделаем углы между прямыми в обеих парах одинаковыми, например, равными 90°. Отрезок общего перпендикуляра двух прямых, заключенный между ними, является кратчайшим отрезком, соединяющим эти прямые. Сближая прямые в наших парах (или отодвигая их друг от друга), сделаем эти отрезки равными по длине, а затем совместим их. Поворотом вокруг полученного отрезка совместим какую-либо прямую первой пары с одной из прямых второй. Это можно сделать, поскольку прямые перпендикулярны отрезку. При этом те прямые, за которыми мы не следили, тоже совместятся (мы считаем, что прямые как бы жестко припаяны к концам отрезка).

Конец доказательства подсказывает вопрос: *пусть у двух пар скрещивающихся прямых одинаковы и расстояние и угол; всегда ли возможно изотопией, в процессе которой не изменяется ни то, ни другое, совместить эти пары?* Как показывает предыдущее рассуждение, это можно сделать, если углы между прямыми равны 90°. А вот если углы не равны 90°, то в результате изотопии, описанной выше, вторые прямые пар могут не совместиться. На рисунке 1 показано, что получится в этом несчастном случае. Вторые прямые пар образуют угол, биссектриса которого параллельна первым прямым (совмещенным); а плоскость этого угла пер-

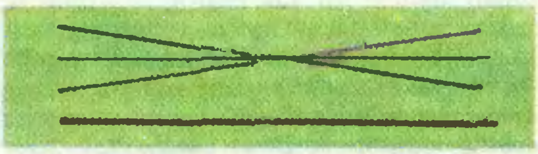


Рис. 1.

*) Слово «изотопия» (греч.) означает «равное место» или «равное положение».

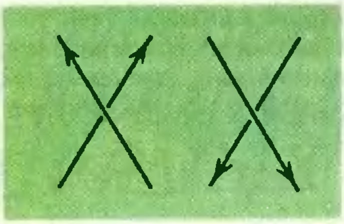


Рис. 2.

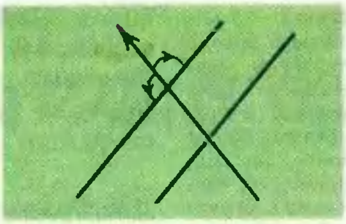


Рис. 3.

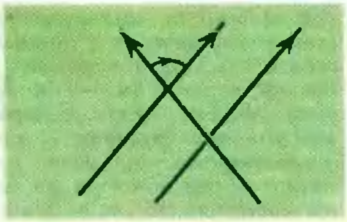


Рис. 4.

пендикулярна плоскости, проходящей через биссектрису и первые прямые. Так что вовсе не случайно в доказательстве изотопности любых двух пар скрещивающихся прямых углы были сделаны равными 90°. При любой другой величине угла эта конструкция доказательства не дает. Более того, дело здесь не в конструкции. Оказывается, две пары скрещивающихся прямых с одинаковыми расстояниями и углами, которые не совмещаются при помощи нашей конструкции, не могут быть совмещены никакой изотопией, в процессе которой расстояние и угол постоянны. Это связано с замечательным явлением, которое нам еще не раз встретится. Его стоит обсудить подробнее.

Ориентации и полуориентации

Ориентированной прямой называется прямая с выделенным на ней направлением. Направление обычно показывается стрелкой. Прямую можно ориентировать двумя способами, две прямые — четырьмя, набор из n прямых — 2^n способами. *Полуориентацией* набора прямых называется пара противоположных ориентаций этого набора. Другими словами, полуориентация набора прямых — это его ориентация с точностью до одновременного обращения всех стрелок («с точностью до наоборот»). На рисунке 2 показаны две ориентации пары прямых, составляющие одну ее полуориентацию.

Каждую пару не перпендикулярных прямых можно снабдить *канонической полуориентацией* (т. е. полуориентацией, которая определяется самой парой, точнее, взаимным расположением входящих в нее прямых). Для этого ориентируем как-либо одну из прямых такой пары и повернем эту прямую так, чтобы она стала параллельна другой прямой. Такой поворот можно осуществить двумя способами (рис. 3); выберем из них самый экономный — тот, при котором угол поворота наименьший (он единственный, поскольку прямые не ортогональны). Получается ориентированная прямая, она параллельна второй прямой нашей пары, которая тем самым приобретает ориентацию (рис. 4). Таким образом, выбор ориентации одной из прямых дает ориентацию пары. Если мы выберем противоположную ориентацию этой прямой, то получим противоположную ориентацию пары. Начав с другой прямой, мы получим те же две противоположные друг другу ориентации пары. Эти две ориентации и составляют обещанную каноническую полуориентацию.

Изотопия, в процессе которой не меняется угол между прямыми, переводит каноническую полуориентацию в каноническую полуориентацию. Это наводит на мысль рассмотреть еще один тип изотопий — *изотопий полуориентированных пар* скрещивающихся прямых: мы допускаем изменения угла и расстояния между прямыми, но требуем, чтобы в процессе изотопии полуориентация не менялась (полуориентация может

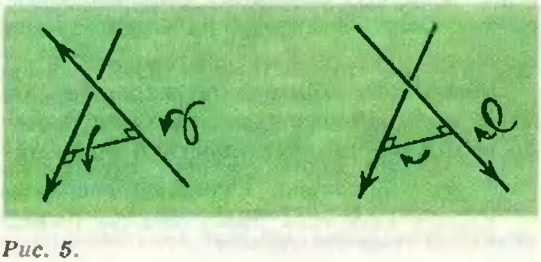


Рис. 5.

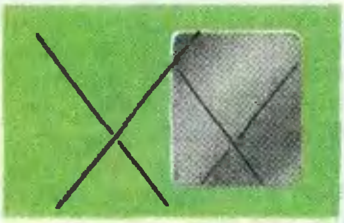


Рис. 6.

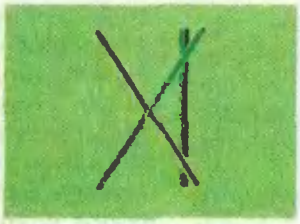


Рис. 7.

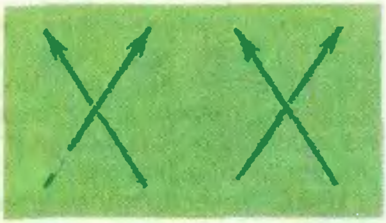


Рис. 8.

быть не канонической). Такая изотопность занимает промежуточное положение между наличием произвольной изотопии и наличием изотопии, в процессе которой расстояние и угол ($\neq 90°$) не меняются. Уж если между интересующими нас полуориентированными парами прямых нет такой изотопии, то не может быть и изотопии, при которой расстояние и угол не меняются. Что же может препятствовать изотопности полуориентированных пар прямых?

Коэффициент зацепления прямых

У каждой полуориентированной пары прямых имеется характеристика, которая может принимать значения $+1$ и -1. Эта характеристика называется *коэффициентом зацепления*. Она сохраняется при изотопиях, и поэтому если две полуориентированные пары прямых имеют разные коэффициенты зацепления, то они не изотопны. Вот как определяется коэффициент зацепления. Имеется самый экономный способ совместить одну ориентированную прямую с другой, скрещивающейся с ней,— перемещать прямую вдоль общего перпендикуляра и поворачивать ее на наименьший угол, необходимый для совмещения направлений. При этом прямая будет двигаться либо как ручка правого буравчика, либо как ручка левого (рис. 5); заметим, что тип буравчика не зависит от того, какую из двух прямых мы двигали. В первом случае коэффициент зацепления равен -1, во втором — $+1$.

Ясно, что переориентация одной из прямых пары влечет за собой изменение коэффициента зацепления. Поэтому при замене ориентации пары на противоположную коэффициент зацепления не меняется и, стало быть, является характеристикой полуориентированной пары и зависит только от полуориентации. При отражении в зеркале коэффициент зацепления пары ориентированных прямых меняется (рис. 6).

Вспомним теперь тот несчастный случай, с которым мы столкнулись в поисках изотопии между двумя парами скрещивающихся прямых, сохраняющей расстояния и углы между прямыми (рис. 7). Тогда мы не смогли ответить на вопрос об изотопности наборов, показанных на рисунке 8. Но теперь-то мы знаем, что такие пары (со своими каноническими полуориентациями) получаются одна из другой отражением в зеркале и имеют поэтому различные коэффициенты зацепления. Значит, такие пары нельзя соединить изотопией, в процессе которой не меняются расстояния и углы между прямыми. А если у двух пар одинаковы расстояния, углы и коэффициенты зацепления, то эти пары можно соединить такой изотопией.

Тройки прямых

Когда мы занимались парами, заметную роль играл общий перпендикуляр пары скрещивающихся прямых. Строго говоря, без него можно было обойтись, но он так естественно связан с прямыми, так надежно соединяет их во что-то целое и обозримое, что было бы странно не воспользоваться им. Теперь хорошо бы найти объекты, столь же присущие тройке скрещивающихся прямых. Мы не будем делать это для тройки, прямые которой лежат в трех параллельных плоскостях. Дело в том, что такое расположение неустойчиво: чуть повернув любую из прямых, мы получим изотопную тройку, к которой наши конструкции применимы.

Итак, рассмотрим произвольную тройку попарно скрещивающихся прямых, не содержащуюся в трех параллельных плоскостях. Через каждую из этих прямых проведем две плоскости, параллельные двум другим прямым. Так получаются шесть плоскостей. Ясно, что они распадаются на три пары параллельных (каждая пара скрещивающихся прямых содержится в двух параллельных плоскостях). Пересекаясь, плоскости образуют параллелепипед. Наши прямые являются продолжениями трех его попарно скрещивающихся ребер (рис. 9). Таким образом, любые три попарно скрещивающиеся прямые, не лежащие в трех параллельных плоскостях, являются продолжениями ребер некоторого параллелепипеда. Этот параллелепипед и является обещанным выше объектом, связанным с тройкой прямых. Чем он замечателен? Прежде всего, он единствен.

В самом деле, через прямую проходит единственная плоскость, параллельная другой, скрещивающейся с ней прямой, и если эти прямые — продолжение ребер параллелепипеда, то в этой плоскости лежит одна из его граней. Следовательно, построенная нами шестерка плоскостей однозначно определяется исходной тройкой прямых, и всякий параллелепипед, ребра которого лежат на этих прямых, ограничен этими плоскостями и, значит, тоже однозначно определен.

Мы видим, что несущий параллелепипед соединяет прямые тройки ничуть не хуже, чем общий перпендикуляр соединял прямые в паре. Здесь, как в случае общего перпендикуляра и в случае полуориентации пары не перпендикулярных прямых, из исходной геометрической конфигурации естественно возникает нечто дополнительное по отношению к ней, но канонически с ней связанное и потому достойное внимания при изучении исходного объекта.

З а г а д к а. *На рисунке 10 изображены, вопреки доказанному выше, два параллелепипеда с ребрами, лежащими на трех попарно скрещивающихся прямых. В чем дело? Где спрятан обман — в доказательстве или в рисунке?*

Займемся классификацией троек с точностью до изотопий. Как было показано, какую бы тройку попарно скрещивающихся прямых мы ни взяли, слегка пошевелив ее, мы можем добиться, чтобы ее прямые оказались продолжениями ребер некоторого параллелепипеда. Параллелепипед определяется (с точностью до движений) длинами своих ребер и углами между ними. Непрерывной деформацией мы можем сначала сделать все углы прямыми (получим прямоугольный параллелепипед), а затем все ребра сделать одинаковой длины, например единичной (получим куб; рис. 11). Эта деформация сопровождается изотопией тройки прямых, являющихся продолжениями ребер параллелепипеда. Таким образом, нам удалось уложить прямые нашей тройки на попарно скрещивающиеся ребра единичного куба. Это замечательное достижение. Действительно, теперь мы знаем, что неизотопных наборов из трех попарно скрещивающихся прямых не так уж много — не больше, чем троек попарно скрещивающихся ребер у куба. А сколько их? На

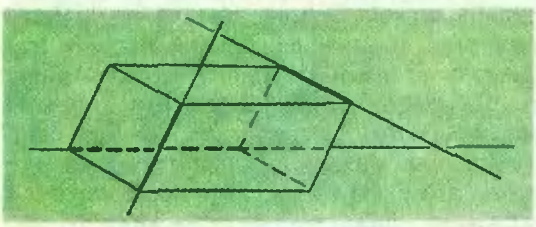


Рис. 9.

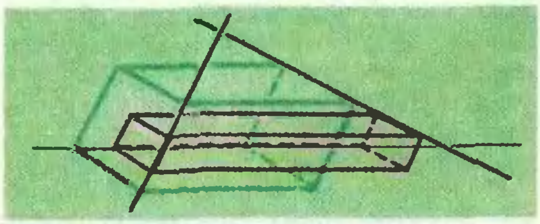


Рис. 10.

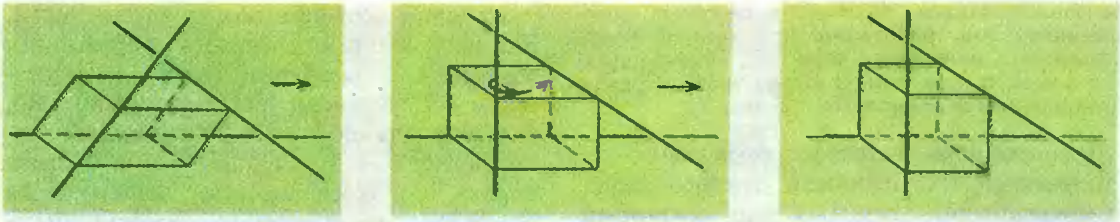


Рис. 11.

первый взгляд, их восемь. В самом деле, фиксируем какую-нибудь грань куба; как мы видели, в ней содержится ровно одно ребро из каждой тройки попарно скрещивающихся ребер, и оно может быть любым из четырех ребер этой грани, а троек, содержащих фиксированное ребро, ровно две (рис. 12). Впрочем, восемь — это слишком много. Поворачивая куб, мы можем перевести любое его ребро в любое другое. Так что возможностей не больше двух; они и показаны на рисунке 12. Этот успех дает надежду на то, что, действуя таким образом, удастся доказать изотопность и троек прямых, показанных на этом рисунке, а значит, и вообще всех троек попарно скрещивающихся прямых. Попробуйте!

Не получается? Не расстраивайтесь, и не должно получиться. Как и у пар ориентированных прямых, у троек (неориентированных!) прямых есть характеристика, называемая *коэффициентом зацепления*, которая может принимать значения ± 1 и которая сохраняется при изотопиях и изменяется при отражении тройки прямых в зеркале. Вот ее определение. В произвольном наборе из трех попарно скрещивающихся прямых ориентируем как попало все прямые. Пары прямых, содержащиеся в нашей тройке, приобретают при этом коэффициенты зацепления (равные ± 1). Перемножив их, получим некоторое число (тоже $+1$ или -1), которое и называется коэффициентом зацепления исходной тройки прямых. Оно не зависит от ориентации прямых: переориентировав любую прямую, мы поменяем знак у двух из трех сомножителей, что не изменит произведения. Сохранение коэффициента зацепления тройки прямых при изотопии и его изменение при отражении тройки в зеркале вытекают из соответствующих свойств коэффициента зацепления пары ориентированных прямых. Поскольку тройки прямых на рисунке 12 являются зеркальными образами друг друга, их коэффициенты зацепления различны, и эти тройки действительно не изотопны.

Поскольку всякая тройка попарно скрещивающихся прямых изотопна одной из двух троек, изображенных на рисунке 12, *две тройки изотопны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые коэффициенты зацепления*.

Итак, уже тройки попарно скрещивающихся прямых могут располагаться по-разному. Это оправдывает заголовок статьи, а также то, что в дальнейшем наборы попарно скрещивающихся прямых мы будем называть просто сплетениями.

Задачи

1. Найдите коэффициенты зацепления каждой из троек прямых на рисунке 12.
2. Прямые, содержащие ребра пространственного четырехугольника $ABCD$, ориентированы «по кругу» (от A к B, от B к C, от C к D, от D к A). Сравните коэффициенты зацеплений пар прямых, лежащих на противоположных ребрах.
3. Докажите, что у всякой тройки попарно

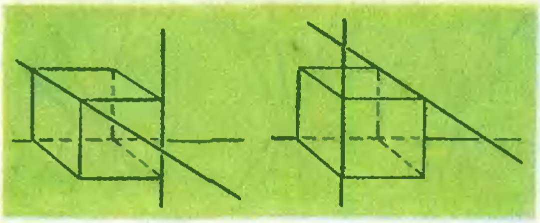


Рис. 12.

скрещивающихся прямых существует единственная полуориентация, при которой коэффициенты зацепления всех пар, содержащихся в этой тройке, равны между собой и равны коэффициенту зацепления тройки.

Зеркальность и незеркальность

Заметим, что никакая тройка скрещивающихся прямых не изотопна своему зеркальному образу, а всякая пара — изотопна. Набор попарно скрещивающихся прямых назовем *зеркальным*, если он изотопен своему зеркальному образу, и *незеркальным* в противном случае. Таким образом, любая тройка незеркальна, а любая пара зеркальна. Возникают вопросы:

1) бывают ли еще такие p, что любое сплетение из p прямых незеркально;

2) и такие p, что любое сплетение из p прямых зеркально;

3) при каких p сплетения p прямых незеркальны;

4) и при каких p — зеркальны?

Хотя мы еще не очень далеко *продвинулись в ответе на основной* вопрос, поставленный в начале статьи (какими с точностью до изотопий бывают сплетения p прямых), имеет смысл отвлечься от него на вопросы 1)—4). Они более грубые и поверхностные, но и более качественные. Их грубость и поверхностность сулят легкий успех, который, несомненно, пригодится при классификации.

В нашем распоряжении пока не очень много средств доказательства незеркальности — мы знаем, что всякая тройка незеркальна. Но это *не так уж мало. Ведь в каждом* сплетении большего числа прямых присутствуют тройки. При зеркальном отражении каждая тройка меняет свой коэффициент зацепления. Значит, если сплетение зеркально, то троек с коэффициентом зацепления $+1$ должно быть столько же, сколько троек с коэффициентом зацепления -1. *Общее количество троек, которые можно выбрать из зеркального сплетения, должно быть* поэтому *четным*. Эти нехитрые соображения приводят к следующему неожиданному результату.

Теорема. *Если при делении числа p на 4 получается остаток 3, то всякое сплетение из p прямых незеркально.*

Для доказательства осталось убедиться в справедливости двух фактов, которые мы оставляет читателям в виде задач.

Задачи

4. Докажите, что сплетение из p прямых содержит $p(p-1)(p-2)/6$ троек (и вообще, любой набор из p предметов содержит столько троек).

5. Докажите, что число $p(p-1)(p-2)/6$ нечетно тогда и только тогда, когда при делении числа p на 4 получается остаток 3.

Теорема отвечает (утвердительно) на первый из сформулированных выше вопросов о зеркальности. Ответ на второй вопрос отрицателен: *для любого $p \geqslant 3$ можно сконструировать незеркальное сплетение из p прямых*. Выделенное курсивом утверждение дает ответ и на третий вопрос. Простейшие такие сплетения для $p=4, 5, 6$ изображены на рисунке 13. Эту серию легко продолжить. (Все тройки прямых, содержащиеся в сплетениях этой серии, имеют одинаковые коэффициенты зацепления, и именно поэтому такие сплетения незеркальны.)

Что же касается последнего вопроса, то здесь ответ такой: *зеркальные тройки существуют, если при*

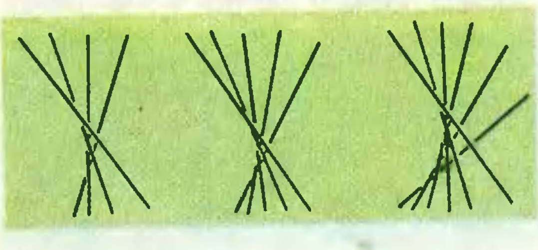


Рис. 13.

Рис. 14.

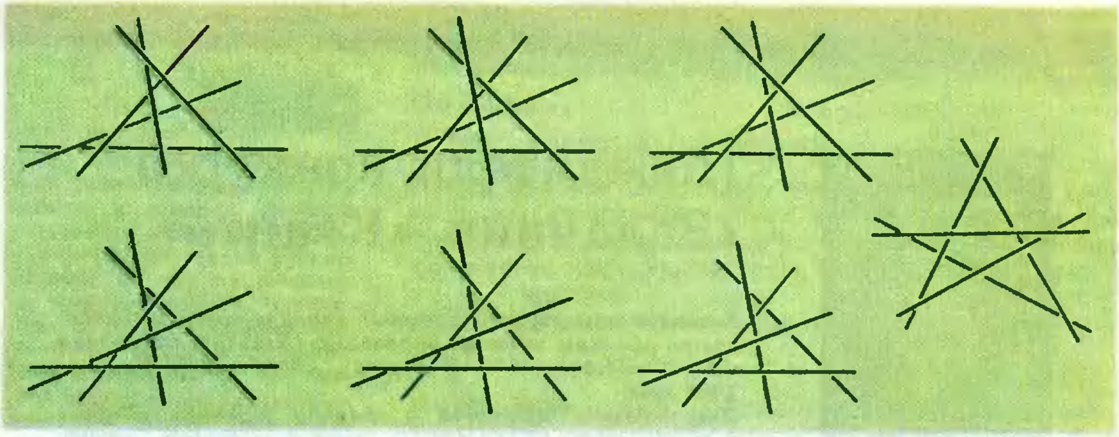


Рис. 15.

делении p на 4 не получается остаток 3. Примеры попробуйте придумать сами; они составляют две серии — одну для четных p, другую для тех p, что дают при делении на 4 остаток 1.

Вернемся теперь к вопросу о классификации сплетений при $p \geqslant 4$.

Сплетения из четырех или более прямых

Со всеми неизотопными типами сплетений из четырех прямых теперь легко познакомиться. Их три (рис. 14). Слева — сплетение, встречавшееся на рисунке 13, в центре — его зеркальный образ, а справа некое зеркальное сплетение. Уже было доказано, что *они не изотопны друг другу*: первое незеркально, и поэтому не изотопно второму (своему зеркальному образу), а третье — зеркально, и поэтому не изотопно ни первому, ни второму. Мы не будем объяснять, почему *любое сплетение четырех прямых изотопно одному из сплетений рисунка 14.* Попробуйте найти объяснение сами.

Можно показать (но это уже не просто), что *любое сплетение из пяти прямых изотопно одному из семи сплетений, изображенных на рисунке* 15. Эти семь сплетений не изотопны друг другу. Для доказательства этого факта сосчитайте у каждого из них сумму коэффициентов зацепления всех 10 троек, которые содержатся в данном сплетении. Ответы все оказываются разными. Ясно, что такая сумма сохраняется при изотопии, и поэтому все семь сплетений попарно не изотопны.

Дальше — еще сложней. *Для $p=6$ имеется 19 типов сплетений* (эта теорема была доказана в 1987 году студентом Ленинградского университета В. Ф. Мазуровским). Некоторые из этих сплетений уже нельзя отличить друг от друга при помощи только коэффициентов зацепления входящих в них троек прямых. Чтобы доказать их неизотопность, пришлось вычислять на ЭВМ более сложные характеристики сплетений.

О числе типов сплетений при $p=7$ известно только, что оно большое и четное. Четное потому, что любая семерка незеркальна.

Начав с элементарного вопроса о классификации сплетений, вот мы уже подошли к «переднему краю науки»..., а значит, и к концу нашего рассказа.

Победители конкурса «Задачник «Кванта»

Ежегодно наш журнал проводит конкурс среди школьников по решению задач из Задачника «Кванта». Объявляем имена победителей конкурса «Задачник «Кванта» 1987 года.

Награждаются Дипломом и значком журнала «Квант» и получают право участвовать сразу в четвертом (республиканском) туре Всесоюзной олимпиады 1988 года:

Ю. Великина — Днепропетровск, с. ш. № 45, 8 кл.
К. Вербицкий — Москва, с. ш. № 607, 10 кл.
А. Витяев — Новосибирск, с. ш. № 166, 10 кл.
В. Волчков — Шахтерск Донецкой обл., с. ш. № 5, 10 кл.
М. Выборнов — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.
Ю. Гнатюк — Каменец-Подольский, с. ш. № 16, 10 кл.
М. Гольдшейд — Челябинск, с. ш. № 31, 10 кл.
Н. Дохолян — Тбилиси, ФМШ № 42, 11 кл.
Н. Зверев — Москва, с. ш. № 57, 9 кл.
В. Калошин — Харьков, ФМШ № 24, 9 кл.
О. Кирнасовский — Винница, с. ш. № 15, 10 кл.
Г. Колесницкий — Тбилиси, ФМШ им. В. М. Комарова, 10 кл.
Д. Косоня — Белорецк, с. ш. № 14, 10 кл.
С. Лаусмаа — Кохтла-Ярве, с. ш. № 13, 9 кл.
А. Лосев — Ленинград, с. ш. № 239, 10 кл.
Т. Мартиросова — Ташкент, с. ш. № 89, 10 кл.
А. Мельник — Гайворон, с. ш. № 2, 9 кл.
Ю. Морозов — Тбилиси, ФМШ им. В. М. Комарова, 10 кл.
А. Назарян — Тбилиси, ФМШ № 42, 11 кл.
В. Павлунин — Фрунзе, с. ш. № 61, 10 кл.
В. Полищук — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.
В. Роткин — Баку, с. ш. № 47, 10 кл.
Р. Садреев — Алма-Ата, РФМШ, 9 кл.
Д. Синицкий — Ленинград, с. ш. № 239, 10 кл.
С. Синякова — Москва, с. ш. № 463, 10 кл.
И. Солтан — Павлодар, с. ш. № 3, 10 кл.
Д. Фельдман — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 9 кл.
В. Фельдшеров — Алма-Ата, РФМШ, 9 кл.
Я. Эфендиев — Баку, с. ш. № 82, 10 кл.
А. Явриян — Ереван, с. ш. № 8, 10 кл.
Н. Адигезалов — Баку, с. ш. № 20, 10 кл.
А. Бабкин — Киев, с. ш. № 206, 9 кл.
С. Бобровник — Черновцы, с. ш. № 24, 9 кл.
И. Велиев — Баку, с. ш. № 56, 10 кл.
С. Вердиян — Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 10 кл.
Б. Гуревич — Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.
Е. Демлер — Новосибирск, с. ш. № 130, 10 кл.
А. Езерский — Минск, с. ш. № 50, 10 кл.
В. Завадский — Минск, с. ш. № 50, 9 кл.
В. Завражний — Фрунзе, с. ш. № 61, 10 кл.
Ф. Занин — Старый Оскол, с. ш. № 16, 8 кл.
Е. Зельцер — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
А. Капустин — Москва, с. ш. № 114, 10 кл.
К. Краснов — Киев, с. ш. № 206, 9 кл.
А. Майков — Старый Оскол, с. ш. № 16, 10 кл.
Р. Малков — Саратов, с. ш. № 13, 9 кл.
К. Николаев — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 10 кл.
Д. Ноготков — Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
З. Османов — Тбилиси, ФМШ № 42, 10 кл.
В. Павлунин — Фрунзе, с. ш. № 61, 10 кл.
Л. Петько — Минск, с. ш. № 50, 10 кл.
А. Подтележников — Харьков, с. ш. № 27, 10 кл.
С. Сазонов — Климовск, с. ш. № 5, 10 кл.
М. Сергазин — Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
А. Сибиряков — Томск, с. ш. № 30, 10 кл.
З. Таварткиладзе — Тбилиси, ФМШ им. В. М. Комарова, 11 кл.
А. Усинский — Ровенская обл., Вербская с. ш.-интернат, 8 кл.
И. Химони — Днепропетровск, с. ш. № 53, 9 кл.
И. Чайка — Кузнецовск, с. ш. № 1, 10 кл.

(Окончание см. на с. 29)

Задачник «Кванта»

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июня 1988 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 3—88» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1091» или «Ф1103». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи

М1091—М1095, Ф1103—Ф1107

М1091. Назовем натуральное число *удачным*, если цифры в его десятичной записи можно разбить на две группы так, что суммы цифр в этих группах равны.

а) Найдите наименьшее число a такое, что числа a и $a+1$ — удачные.

б) Существует ли такое a, что числа a, $a+1$ и $a+2$ — удачные?

П. И. Зильберберг

М1092. Вырезанный из бумаги выпуклый многоугольник 10 раз складывают (перегибая по некоторым прямым) и затем разрезают по прямой. Какое наибольшее число кусков может получиться?

С. В. Казаков

М1093. На окружности в n точках расставлены числа 0, 1, 2. Затем одновременно во всех точках производится следующее преобразование: каждое число 2 заменяется на 0, а затем к следующему за ним по часовой стрелке числу прибавляется 1. Пусть вначале количество двоек равнялось $k \geqslant 1$.

а) Через какое количество преобразований заведомо не останется ни одной двойки?

б) Пусть, кроме того, в $n-k$ остальных точках вначале стояли единицы. Докажите, что в конце концов останется k единиц и $n-k$ нулей (рис. 1).

Н. Александру (Румыния)

М1094. Пусть a, b, c — неотрицательные числа.

а) Докажите, что из неравенства

$$a^4+b^4+c^4 \leqslant 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \qquad (1)$$

следует неравенство

$$a^2+b^2+c^2 \leqslant 2(ab+bc+ca). \qquad (2)$$

б) Верно ли обратное: из неравенства (2) следует неравенство (1)?

В. А. Сендеров

М1095*. На плоскости задана окружность с центром O и две точки A, B (отличные от O) такие, что прямая AB проходит через точку O. Постройте хорду MN этой окружности, которая видна из точки A под заданным углом α и

а) параллельна прямой AB;

б) проходит через точку B. (Если B лежит вне окружности, то через B должно проходить продолжение хорды MN.)

Р. О. Бурдин

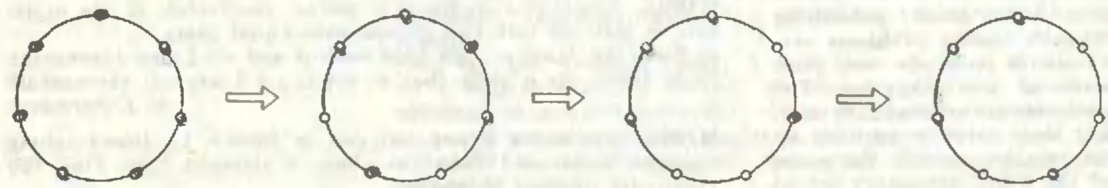


Рис. 1. Точки, в которых стоят числа 2, — красные, 1 — голубые, 0 — белые; здесь $k=4$, $n-k=3$.

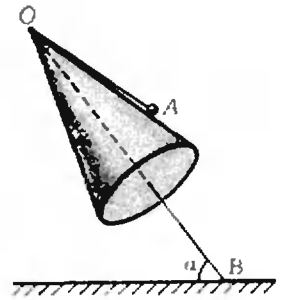


Рис. 2.

Задачник „Кванта"

Ф1103. Математический маятник длиной l покоится в точке A на конусе с углом раствора 2β (рис. 2). Какой путь пройдет маятник до отрыва от поверхности конуса, если легким толчком маятник вывести из положения равновесия? Угол наклона конуса к поверхности земли α, поверхность конуса считается гладкой.

Л. Г. Маркович

Ф1104. Концы двух однородных стержней привязаны друг к другу невесомыми и нерастяжимыми нитями. Один из стержней подвязали за середину к штативу. Доказать, что образованный таким образом из нитей и стержней четырехугольник является трапецией.

В. Т. Карапетян

Ф1105. Металлический диск радиусом $r=10$ см вращается в горизонтальной плоскости со скоростью $\nu = 60$ об/мин. С высоты $H=10$ см на него падает пластмассовый брусок, масса которого много меньше массы диска. Нижняя грань бруска все время параллельна плоскости диска, коэффициент трения между металлом и пластмассой $\mu=0{,}1$. На каком расстоянии от оси должен упасть брусок, чтобы при повторном падении он упал за пределами диска? Считать, что после отскока брусок поднимается на прежнюю высоту; размерами бруска пренебречь.

Л. А. Закревский

Ф1106. Несколько слов о сверхпроводниках. Сверхпроводники обладают свойством выталкивать магнитное поле (так называемый эффект Мейснера), благодаря чему они могут парить над магнитом. Эту особенность сверхпроводников предполагается использовать для создания сверхскоростных поездов на «магнитной подвеске», опытные образцы которых уже испытываются. А теперь сама задача. На сверхпроводящий образец массой m, парящий над постоянным магнитом, кладут груз точно такой же массы. Во сколько раз необходимо увеличить магнитную индукцию поля, создаваемого магнитом, чтобы сверхпроводник с грузом парил на прежнем расстоянии от магнита?

А. И. Буздин

Ф1107. Свежевыпавший пушистый снег искрится на солнце. Оцените характерное расстояние между отдельными «искринками».

Е. Н. Юносов, И. В. Яминский

[redacted]

Problems

M1091—M1095, P1103—P1107

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult

M1091. A natural number is called *successful*, if its digits can be split up into two groups with equal sums.
a) Find the least a such that both a and $a+1$ are successful.
b) Is there an a such that a, $a+1$, $a+2$ are all successful?

N. I. Zilberberg

M1092. A convex paper polygon is folded 10 times (along straight lines) and then cut along a straight line. Find the maximum number of pieces.

S. V. Kazakow

problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than June 1st, 1988, to the following address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the colution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

Задачник „Кванта"

M1093. The numbers 0, 1, 2 are written at n points of a circle. Then the same operation is simultaneously carried out at all the points: each 2 is replaced by a 0 and 1 is added to the nearest clockwise number. At the start there are k numbers 2.
a) After how many such operations can we garantee that no 2's remain?
b) Suppose that $k \geqslant 1$ and at the start there were $n-k$ numbers 1 (hence no 0's). Prove that finally there will be k ones and $n-k$ zeros (figure рис. 1 p. 21).

N. Alexandru (Rumania)

M1094. Suppose a, b, c are non-negative numbers.
a) Prove that the inequality

$$a^4+b^4+c^4 \leqslant 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \qquad (1)$$

implies the inequality

$$a^2+b^2+c^2 \leqslant 2(ab+bc+ca). \qquad (2)$$

b) Is the converse true: does (2) imply (1)?

V. A. Senderov

M1095*. A circle with centre O and two points A, B (neither coinciding with O) such that the line AB contains O are given in the plane. Construct a chord MN of this circle which is seen from the point A under the given angle α and
a) is parallel to AB;
b) passes through B. (If B is outside the circle, then the line MN must pass through B.)

R. O. Burdin

P1103. A mathematical pendulum of length l is in equilibrium at the point A of a cone with summit angle 2β (see figure рис. 2). How far will the pendulum move intil it leaves the surface of the cone, if it is displaced from the equilibrium position by a slight push? The angle between the cone's axis and the Earth's surface is α; the surface of the cone is assumed smooth.

L. G. Markovich

P1104. The extremities of two uniform rods are tied to each other with weightless unstrechable strings. One of the rods is tied to a support from its midpoint. Prove that the quadrangle thus formed by the rods and strings is a trapezium.

V. T. Karapetyan

P1105. A massive disk of radius $R=0.1$ m rotates with velocity 60 RPM about a vertical axis perpendicular to the disk at its centre. A small light horizontally oriented slab falls with zero initial velocity from the altitude $H=0.1$ m above the disk. After hitting the disk, the slab bounces up without rotating to nearly the same height H. The sliding friction coefficient between disk and slab is $\mu=0.1$. Find the distance from the axis of rotation to the point of impact such that the slab will not fall on the disk again.

L. A. Zakrevski

P1106. A few words about superconductors. Superconductors possess the property of pushing out magnetic fields (the so-called Meisner effect), as the result of which they can „float" above a magnet. This property of superconductors is to be used to design extrafast trains on „magnetic cushions", experimental models of which are already being tested.
Now for the problem itself. A weight of mass m is placed on a superconducting sample of mass m floating above a constant magnet. How many times must one increase the magnetic induction of the magnet's field in order to have the weighted sample floating at the same distance from the magnet?

A. I. Buzdin

Задачник „Кванта"

P1107. Freshly fallen snow sparkles in the sun. Estimate the characteristic distance between neighbouring flashes of reflected light.

E. N. Yunosov, I. V. Yaminski

Решения задач
M1070, M1072—M1075,*) Ф1084—Ф1087

M1070. *Тетраэдр пересечен тремя плоскостями, каждая из которых параллельна двум его противоположным ребрам и одинаково удалена от них. Докажите, что сумма квадратов площадей этих трех сечений в 4 раза меньше суммы квадратов площадей граней тетраэдра.*

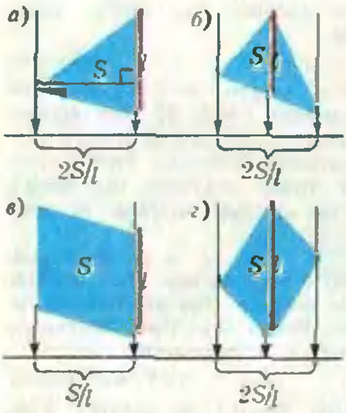


Рис. 1.

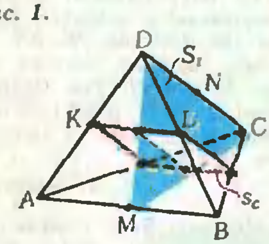


Рис. 2.

Мы рассмотрим несколько ортогональных проекций тетраэдра и воспользуемся тем, что проекции треугольника вдоль стороны или вдоль медианы и проекции параллелограмма вдоль стороны или диагонали есть отрезки, длины которых выражаются через площадь соответствующей фигуры и длину стороны, медианы или диагонали (рис. 1).

Пусть дан тетраэдр $ABCD$ (рис. 2). Каждая из секущих плоскостей проходит через середины 4-х его ребер и, следовательно, пересекает его по параллелограмму, ограниченному средними линиями граней. Площади сечений, параллельных соответственно ребрам DA, DB, DC, обозначим через s_a, s_b, s_c, площади граней ABC, BCD, CDA, DAB — через S_D, S_A, S_B, S_C. Спроектируем тетраэдр вдоль ребра CD (рис. 3). Получится треугольник ABC (мы сохраняем за проекциями точек те же обозначения, что и за самими точками). Проведем в нем среднюю линию KL, параллельную AB (это проекция сечения s_c), и медиану CM (это проекция треугольного сечения CDM нашего тетраэдра; M — середина ребра AB). В параллелограмме $CLMK$ (рис. 3) стороны и диагонали равны

$$CL=KM=CB/2=S_A/l,$$
$$CK=LM=CA/2=S_B/l,$$
$$KL=2s_c/l,\ CM=2S_1/l,$$

где $l=CD$, S_1 — площадь $\triangle CDM$. Записывая для $CLMK$ «равенство параллелограмма» (сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон), получим

$$2(S_A^2+S_B^2)=4s_c^2+4S_1^2. \qquad (1)$$

Аналогично доказывается равенство

$$2(S_C^2+S_D^2)=4s_c^2+4S_2^2, \qquad (2)$$

где S_2 — площадь *треугольного сечения* ABN, *проходящего через середину* N ребра CD. Наконец, ортогонально спроектируем тетраэдр вдоль его «средней линии» MN (рис. 4). Получится параллелограмм $ACBD$ (диагонали AB и CD, пересекаясь, делятся пополам). Диагонали этого параллелограмма — это проекции *треугольных сечений* S_1 *и* S_2, т. е. $AB=2S_2/m$, $CD=2S_1/m$, где $m=MN$, а средние линии — проекции сечений s_a и s_b, и, поскольку стороны равны средним линиям, $AD=2s_a/m$, $AC=2s_b/m$. Еще раз используем *«равенство параллелограмма»*:

$$2(4s_a^2+4s_b^2)=4S_1^2+4S_2^2. \qquad (3)$$

Из (1), (2) и (3) следует утверждение задачи:

$$S_A^2+S_B^2+S_C^2+S_D^2=4(s_a^2+s_b^2+s_c^2).$$

Отметим, что эта задача в другой формулировке

*) Решение задачи M1071 будет опубликовано в следующем номере журнала.

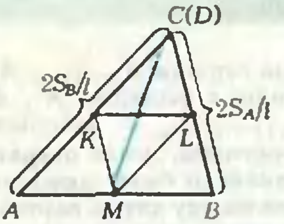


Рис. 3.

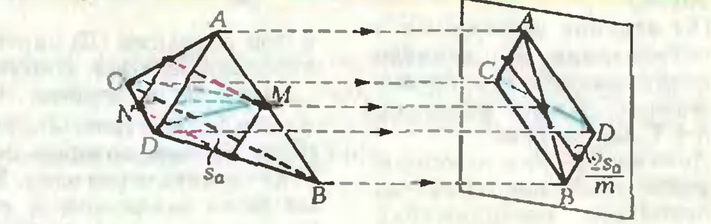


Рис. 4.

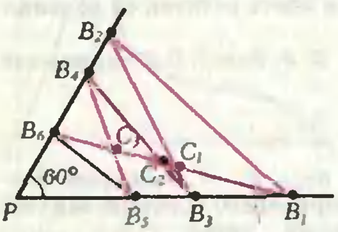
появилась в недавно изданном очень содержательном задачнике «Зарубежные математические олимпиады» (М., 1987, с. 49, задача 15.17).

M1072. *Разложите на простые множители число* $989 \cdot 1001 \cdot 1007 + 320$.

Ответ: $1009 \cdot 997 \cdot 991$. Догадаться до этого разложения можно с помощью следующего соображения: если $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$, то $f(x)+f(-x)=-2(a+b+c)x^2+2f(0)$, т. е. при $a+b+c=0$ сумма $f(x)+f(-x)$ постоянна. В нашем случае можно взять $f(x)=(x-10)\times(x+2)(x+8)$, тогда заданное число равно $f(999)-2f(0)=-f(-999)=1009 \cdot 997 \cdot 991$. Легко проверить, что все три множителя здесь простые.

С. В. Фомин

M1073. *В шестиугольнике* $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ *нашлась точка* O, *из которой все стороны видны под углом* $60°$. *Докажите, что если* $OA_1>OA_3>OA_5$ *и* $OA_2>OA_4>OA_6$, *то* $A_1A_2+A_3A_4+A_5A_6<A_2A_3+A_4A_5+A_6A_1$.



Отложим на сторонах угла величиной $60°$ от его вершины P отрезки $PB_i=OA_i$, $i=1, 2, \ldots, 6$, как показано на рисунке. Поскольку отрезки B_1B_2, $B_2B_3, \ldots, B_6B_1$ соответственно равны отрезкам A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_6A_1$, достаточно доказать, что

$$B_1B_2+B_3B_4+B_5B_6<B_2B_3+B_4B_5+B_6B_1.$$

Это неравенство получается, если сложить 4 неравенства треугольника (см. рисунок):

$$B_1B_2<B_1C_1+C_1B_2,$$
$$B_3C_2<B_3C_1+C_1C_2,$$
$$C_2B_4<C_2C_3+C_3B_4,$$
$$B_5B_6<B_5C_3+C_3B_6,$$

где C_1, C_2, C_3 — точки пересечения отрезка B_1B_6 с отрезками B_2B_3, B_4B_1 и B_4B_5. (Указанные отрезки пересекаются благодаря неравенствам, данным в условии. Например, из неравенств $PB_3<PB_1$ и $PB_6<PB_2$ следует, что точки B_3 и P лежат по одну сторону от B_1B_6, а B_2 и P — по разные, поэтому B_3 и B_2 лежат по разные стороны от B_1B_6, т. е. *прямая* B_1B_6 пересекает *отрезок* B_2B_3; аналогично доказывается, что прямая B_2B_3 пересекает отрезок B_1B_6, и, следовательно, отрезки B_2B_3 и B_1B_6 пересекаются.)

А. С. Меркурьев

M1074. *Дана стопка из* $2n+1$ *карточек, с которой разрешается производить следующие две операции: (А) сверху снимается часть*

Занумеруем карточки сверху вниз числами $0, 1, \ldots, 2n$ и выложим их последовательно в вершинах правильного многоугольника $A_0A_1 \ldots A_{2n}$ (рис. 1). Тогда операции (А) отвечает поворот всего набора карточек вокруг центра многоугольника на угол, кратный $360°/(2n+1)$.

карточек и перекладывается вниз с сохранением порядка:
(Б) верхние n карточек с сохранением порядка вкладываются в n промежутков между нижними $n+1$ карточками.
Докажите, что с помощью указанных операций из исходного расположения карточек в стопке нельзя получить более $2n(2n+1)$ различных расположений карточек.

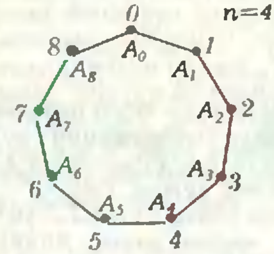


Рис. 1.

Задачник „Кванта"

а при операции (Б) карточки из вершин $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ перекладываются, соответственно, в вершины $A_1, A_3, \ldots, A_{2n-1}$, а из вершин $A_n, A_{n+1}, \ldots, A_{2n}$ — в вершины $A_2, A_4, \ldots, A_{2n}$ (рис. 2). Таким образом, после операции (Б) карточки, которые первоначально были соседними, будут стоять через одну. Если же между двумя карточками было заключено k сторон многоугольника (всегда можно считать $k \leqslant n$), то в результате операции (Б) между ними окажется $2k$ сторон. В частности, расстояния между карточками 0 и 1, 1 и 2,..., $2n$ и 0 будут оставаться равными между собой при выполнении опе-

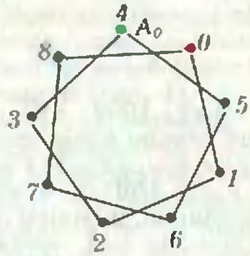


Рис. 2.

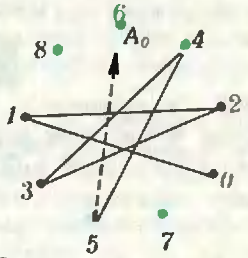


Рис. 3.

раций (А) и (Б) в любом числе и порядке. Поэтому расстановка всех карточек полностью задается положением карточек 0 и 1: если 0 находится в вершине A_i, а 1 — в вершине A_j, то 2 — в такой вершине A_k, что $A_jA_k = A_iA_j$, 3 — в такой вершине A_l, что $A_kA_l = A_iA_j$, и т. д. (рис. 3). Место для карточки 0 можно выбрать $2n+1$ способами, для карточки 1 остается $2n$ мест. Следовательно, число возможных расположений не превосходит $2n(2n+1)$.
Чтобы получить точное число расположений, надо здесь множитель $2n$ заменить на число различных остатков от деления степеней двойки на $2n+1$. (При каждом применении операции (Б) число сторон многоугольника между карточками 0 и 1, отсчитываемое в заданном направлении, нужно удвоить и взять остаток от деления на $2n+1$.)

Д. В. Фомин, В. Н. Дубровский

М1075. *Найдите наибольшее натуральное число, в десятичной записи которого каждая цифра (кроме крайних) строго меньше полусуммы двух соседних с ней цифр.*

Ответ: 96433469. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — последовательные цифры числа N, удовлетворяющего условию задачи. Рассмотрим разности соседних чисел $d_i = a_{i+1} - a_i$, $i = 1, \ldots, n-1$. Условие $a_i < (a_{i-1} + a_{i+1})/2$ можно переписать в виде $a_i - a_{i-1} < a_{i+1} - a_i$, или $d_{i-1} \leqslant d_i - 1$. Пусть a_m — наименьшая цифра числа N. Можно считать, что $a_{m-1} > a_m$, $a_m \leqslant a_{m+1}$, т. е. $d_{m-1} \leqslant -1$, $d_m \geqslant 0$. Тогда $d_{m-2} \leqslant d_{m-1} - 1 \leqslant -2$, $d_{m-3} \leqslant -3, \ldots$, а $d_{m+1} \geqslant d_m + 1 \geqslant 1$, $d_{m+2} \geqslant 2$, $d_{m+3} \geqslant 3, \ldots$
Докажем, что $n \leqslant m+4$. Допустим, что это не так, тогда $a_{m+5} = a_{m+4} + d_{m+4} \geqslant a_{m+4} + 4 \geqslant a_{m+3} + 3 + 4 \geqslant \ldots \geqslant a_{m+1} + 1 + 2 + 3 + 4 \geqslant 10$, но $a_{m+5} \leqslant 9$. Аналогично доказывается, что $m \leqslant 4$ (в противном случае $a_{m-4} \geqslant a_{m-3} - a_{m-4} \geqslant a_{m-3} + 4 \geqslant \ldots \geqslant a_m + 10$). Итак, $n \leqslant 8$, причем если $n = 8$, то $m = 4$. Подставляя $m = 4$ в оценки

для d_i и учитывая, что $a_1 \leqslant 9$, $a_8 \leqslant 9$, получим:

$a_2 = a_1 + d_1 \leqslant 9 - 3 = 6$, $a_3 \leqslant a_2 - 2 \leqslant 4$, $a_4 \leqslant a_3 - 1 \leqslant 3$;

$a_7 = a_8 - d_7 \leqslant 9 - 3 = 6$, $a_6 \leqslant a_7 - 2 \leqslant 4$, $a_5 \leqslant a_6 - 1 \leqslant 3$.

Следовательно, $N \leqslant 96433469$.

С. Е. Рукшин

Ф1084. *Если к обмерзшему стеклу на незначительное время прижать пятак, то вдоль края пятака на стекле протаивает кружок. Почему?*

Когда мы прижимаем пятак к стеклу, он нагревается от руки. От него нагревается и тает иней. А касается монета инея прежде всего по краям, там, где имеется утолщение. Между остальной частью монеты и инеем имеется воздушный зазор. Теплопроводность воздуха намного меньше теплопроводности металла. Поэтому сначала «прогревается» и протаивает иней по кольцу, по краю монеты. После этого монета «ложится» на иней всей поверхностью, и таяние инея происходит по всей площади монеты.

Л. А. Ашкинази

Ф1085. *На рисунке 1 изображен процесс, совершаемый над идеальным газом и переводящий его из состояния A в состояние B. Найдите на графике участки процесса, где температура газа повышается (понижается).*

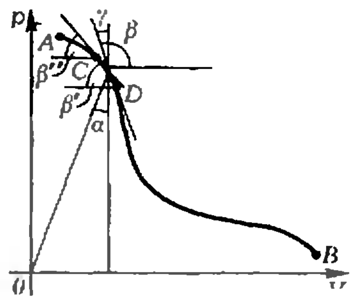


Рис. 1.

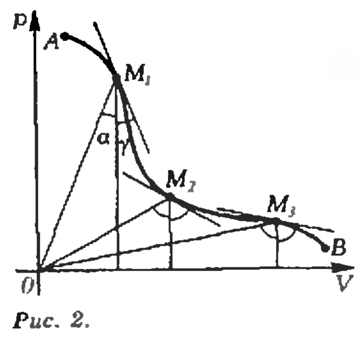


Рис. 2.

Рассмотрим на кривой две достаточно близкие точки процесса C и D и запишем выражение для изменения температуры газа при переходе из точки C в точку D:

$$\Delta T_{CD} = T_C - T_D = \frac{M}{mR}((p+\Delta p)(V+\Delta V) - pV) \approx$$

$$\approx \frac{M}{mR}(p \cdot \Delta V + V \cdot \Delta p).$$

Пусть $\Delta T_{CD} \approx 0$ (это означает, что либо точки C и D лежат на одной изотерме, либо при переходе $C \to D$ температура газа проходит через экстремальное значение (максимальное или минимальное)). Тогда

$$\frac{p}{V} = -\frac{\Delta p}{\Delta V}. \qquad (*)$$

Из рисунка 1 видно, что $\frac{p}{V} = \operatorname{ctg} \alpha$, а при достаточно близких точках C и D

$$\frac{\Delta p}{\Delta V} = \operatorname{tg} \beta' \approx \operatorname{tg} \beta'' \approx \operatorname{tg} \beta = -\operatorname{ctg} \gamma.$$

Таким образом, из (*) следует, что

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \gamma, \text{ или } \alpha = \gamma.$$

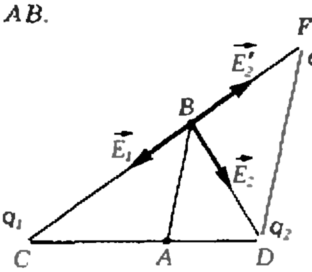
Предположим теперь, что в какой-либо точке кривой AB $\alpha < \gamma$. Тогда $\operatorname{ctg} \alpha > \operatorname{ctg} \gamma$, и, повторяя приведенные рассуждения в обратном порядке, получим, что $\Delta T_{CD} > 0$. Следовательно, температура газа при прохождении через эту точку увеличивается. И наоборот: если в какой-то точке $\alpha > \gamma$, то $\Delta T_{CD} < 0$, и температура газа в данном случае уменьшается.

Найдя на графике точки M_1, M_2 и M_3, в которых $\alpha = \gamma$ (см. рис. 2), выясняем, что на участках процесса AM_1 и M_2M_3, где $\alpha < \gamma$, температура газа увеличивается, а на участках M_1M_2 и M_3B ($\alpha > \gamma$) — уменьшается.

И. Ю. Потеряйко

Задачник «Кванта»

Ф1086. *Суммарная напряженность электрического поля, создаваемого двумя точечными зарядами, в точке A равна нулю, а в точке B модули напряженностей полей этих зарядов одинаковы. Показать, что в точке B напряженность результирующего поля направлена вдоль прямой AB.*



Рассмотрим решение для случая одноименных (отрицательных) зарядов q_1 и q_2, размещенных в точках C и D (см. рисунок). Очевидно, что точка A лежит на отрезке CD, а точка B находится от него на некотором расстоянии. Если, например, через точку D провести прямую, параллельную AB, и в точке пересечения F этой прямой с прямой CB поместить заряд $q'_2=q_2$, то суммарная напряженность полей, создаваемых зарядами q_1 и q'_2, в точке B будет равна нулю, так как B делит отрезок CF в соотношении точно таком же, как точка A делит CD $\left(AB \parallel DF \Leftrightarrow \frac{|CA|}{|AD|} = \frac{|CB|}{|BF|}\right)$. Следовательно, $\vec{E}_1+\vec{E}'_2=\vec{0}$, и $|\vec{E}'_2|=|\vec{E}_1|=|\vec{E}_2|$.

Далее. Заряды q_2 и q'_2 равны между собой и создают в точке B равные по модулю напряженности; отсюда $|BF|=|BD|$ и $\angle BFD=\angle BDF$. Кроме того, $\angle CBA=\angle BFD$, $\angle ABD=\angle BFD$. Из всего этого следует, что $\angle CBA=\angle ABD$ и BA является биссектрисой угла $\angle CBD$.

Таким образом, напряженность результирующего поля, создаваемого двумя точечными зарядами q_1 и q_2, в точке B будет направлена вдоль биссектрисы AB угла, образованного векторами $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$.

В случае разноименных зарядов задача решается аналогично.

В. Т. Карапетян

Ф1087. *Математический маятник совершает колебания. Угол максимального отклонения от положения равновесия $\alpha_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$. Укажите углы α_1 и α_2, при которых ускорение груза принимает наименьшее и наибольшее значения. Нарисуйте графики зависимости α_1 и α_2 от α_0.*

Ускорение груза не зависит от того, в какую сторону от положения равновесия отклонен маятник, поэтому достаточно рассмотреть положительные углы отклонения α (рис. 1).

Полное ускорение груза $\vec{a}$ есть векторная сумма центростремительного ускорения $\vec{a}_ц$ и тангенциального ускорения a_τ. Как видно из рисунка 1, $a_\tau=g\sin\alpha$. Центростремительное ускорение — $a_ц=v^2/l$. Скорость найдем из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2}=mgl(\cos\alpha-\cos\alpha_0) \Rightarrow v^2=2gl(\cos\alpha-\cos\alpha_0).$$

Таким образом,

$$a=\sqrt{a_ц^2+a_\tau^2}=g\sqrt{4\,(\cos\alpha-\cos\alpha_0)^2+\sin^2\alpha}.$$

Решение задачи сводится к нахождению наименьшего и наибольшего значений квадратного трехчлена от $\cos\alpha$:

$$f(\cos\alpha)=4(\cos\alpha-\cos\alpha_0)^2+\sin^2\alpha=$$
$$=3\cos^2\alpha-8\cos\alpha\cos\alpha_0+4\cos^2\alpha_0+1.$$

Найдем производную функции f:

$$f'(\cos\alpha)=6\cos\alpha-8\cos\alpha_0.$$

Если $f'(\cos\alpha)<0$, то $f(\cos\alpha)$, а следовательно и ускорение a, убывает и свое наименьшее значение принимает при $\alpha_1=0$ для любых $\alpha_0 \leqslant \alpha_{0A}=\arccos\frac{3}{4}$. Если же

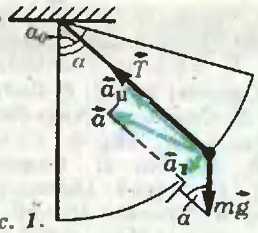


Рис. 1.

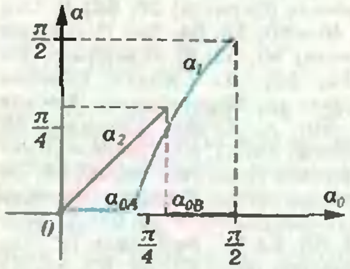


Рис. 2.

Задачник „Кванта"

$\alpha_{0A} \leqslant \alpha_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$, то ускорение a принимает минимальное значение при $\alpha_1 = \arccos\left(\frac{4}{3}\cos\alpha_0\right)$ (см. рис. 2).

$$\Delta = f(1) - f(\cos\alpha_0) = 5\cos^2\alpha_0 - 8\cos\alpha_0 + 3.$$

Максимальное значение $f(\cos\alpha)$ (а следовательно, ускорение a) принимает либо при $\cos\alpha = \cos\alpha_0$, либо при $\cos\alpha = 1$. Рассмотрим разность

$$\Delta = f(1) - f(\cos\alpha_0) = 5\cos^2\alpha_0 - 8\cos\alpha_0 + 3.$$

Видим, что

$$\Delta \leqslant 0 \text{ при } \cos\alpha_0 \geqslant 3/5,$$
$$\Delta > 0 \text{ при } \cos\alpha_0 < 3/5.$$

Значит, ускорение a принимает максимальное значение (см. рис. 2)

$$\text{при } \alpha_2 = \alpha_0, \text{ если } \alpha_0 \leqslant \alpha_{0B} = \arccos\frac{3}{5},$$
$$\text{при } \alpha_2 = 0, \text{ если } \alpha_{0B} < \alpha_0 \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

О. А. Седлецкий

Победители конкурса «Задачник «Кванта»

(Начало см. на с. 20)

Награждаются Дипломом и значком журнала «Квант» и книгами серии «Библиотечка «Квант» за активное участие в конкурсе:

По математике

В. Вологодский — Омск, с. ш. № 91, 10 кл.
Д. Вольпер — Омск, с. ш. № 66, 10 кл.
А. Гороховский — Киев, с. ш. № 79, 10 кл.
Р. Гринив — Львов, с. ш. № 62, 10 кл.
И. Зефиров — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
И. Кокорев — Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ, 10 кл.
А. Кулик — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.
В. Матвеев — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
Я. Мустафаев — Баку, с. ш. № 20, 10 кл.
Д. Прокофьев — Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ, 10 кл.
В. Рагулин — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 9 кл.
В. Слитинский — Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
Д. Туляков — Жданов, с. ш. № 7, 10 кл.
Ф. Фот — Воронеж, с. ш. № 58, 10 кл.
О. Христенко — Караганда, с. ш. № 63, 10 кл.

По физике

А. Белецкий — Канев, с. ш. № 4, 10 кл.
С. Белоусов — Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ, 10 кл.
А. Билибин — Боровичи, с. ш. № 1, 10 кл.
Д. Виткуп — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
П. Вольфбейн — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
А. Гончаров — Новосибирск, с. ш. № 130, 10 кл.
П. Горьков — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 10 кл.
С. Дронов — Пущино, с. ш. № 3, 10 кл.
А. Ельяшевич — Минск, с. ш. № 16, 10 кл.
Д. Зеленский — Семипалатинск, с. ш. № 3, 10 кл.
С. Зеленский — Семипалатинск, с. ш. № 3, 10 кл.
А. Зискинд — Винница, с. ш. № 17, 10 кл.
В. Каменькович — Харьков, с. ш. № 27, 10 кл.
В. Камчатный — Киев, с. ш. № 206, 9 кл.
А. Комник — Старый Оскол, с. ш. № 16, 9 кл.
А. Коршков — Мозырь, с. ш. № 8, 9 кл.
Ю. Кравченко — Москва, с. ш. № 820, 10 кл.
В. Лендерман — Киев, с. ш. № 208, 10 кл.
А. Мазуренко — Минск, с. ш. № 50, 10 кл.
А. Мамаев — Заволжье, с. ш. № 17, 10 кл.
А. Мацко — Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
Н. Михайловский — Красноярск, с. ш. № 20, 10 кл.
В. Мороз — Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ, 10 кл.
К. Пенанен — Одесса, с. ш. № 63, 10 кл.
О. Покрамович — Брест, с. ш. № 1, 10 кл.
Р. Сагайдак — с. Матусов Черкасской обл., с. ш. № 1, 10 кл.
Д. Симонян — Рига, с. ш. № 79, 10 кл.
В. Синенко — Канев, с. ш. № 4, 10 кл.
М. Соколов — Одинцово, с. ш. № 11, 10 кл.
Д. Тильга — Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
И. Тодощенко — Пермь, с. ш. № 16, 10 кл.
Г. Фейгин — Тула, с. ш. № 36, 10 кл.
С. Штовба — Винница, с. ш. № 33, 10 кл.
И. Ясников — Тольятти, с. ш. № 59, 10 кл.

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1045—М1060, Ф1058—Ф1072, справились с задачами М1045, М1046, М1051, М1053, М1056—М1060, Ф1058, Ф1062, Ф1063, Ф1065, Ф1068, Ф1071. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Ю. Великина (Днепропетровск) 49, 50, 52, 55; *К. Вербицкий* (Москва) 49, 50, 52, 54; *А. Виницкий* (Калуга) 50, 55; *А. Винцюк* (Киев) 49, 50; *А. Витяев* (Новосибирск) 49, 50, 54; *В. Вологодский* (Омск) 49, 50, 52, 54; *В. Волчков* (Шахтерск) 48—50, 52, 54, 55; *Д. Вольпер* (Омск) 49, 50, 52, 54, 55; *Я. Воробец* (Львов) 49, 50, 52; *М. Выборнов* (Киев) 48—50, 52, 55; *Ю. Гнатюк* (Каменец-Подольский) 49, 50, 52, 54; *М. Гольдшейд* (Челябинск) 48—50, 52, 54, 55; *А. Гороховский* (Киев) 48—50, 52, 54, 55; *В. Гравит* (Северодвинск) 49, 50, 52, 54, 55; *Р. Гринив* (Львов) 49, 50, 52, 54, 55; *А. Давыдов* (с. Елфимово Горьковской обл.) 49; *Р. Дадашов* (п. Борадыгях АзССР) 50; *Н. Дохолян* (Тбилиси) 49; *С. Дронов* (Пущино) 49, 50, 52, 54; *К. Дышлевой* (Черкассы) 52, 54; *И. Жарков* (Свердловск) 48—50, 52, 54, 55; *И. Жильцов* (Свердловск) 52; *Ю. Жуков* (Тула) 50; *Ю. Журавель* (Киев) 49; *Н. Зверев* (Москва) 49, 50, 52, 54, 55; *С. Зелик* (Краматорск) 49, 54; *И. Зефиров* (Химки) 48—50, 52, 54, 55; *Е. Иванов* (Москва) 52, 54, 55; *А. Калинин* (Саратов) 49, 50, 52, 55; *В. Калошин* (Харьков) 49, 50, 52, 54; *С. Кириллов* (Одесса) 49, 52, 54; *О. Кирнасовский* (Виницца) 49, 50, 52, 54, 55; *С. Коваценко* (Винница) 50, 52; *О. Коврижкин* (Майкоп) 49, 52, 54; *А. Козачко* (Винница) 50, 52; *И. Кокорев* (Ленинград) 49, 50, 52, 54, 55; *Г. Колесницкий* (Тбилиси) 49, 50, 55; *А. Коршков* (Мозырь) 49, 50, 52; *Д. Косоня* (Белорецк) 48—50, 52, 54, 55; *В. Крепец* (Новосибирск) 48—50, 52; *Г. Кроник* (Ленинград) 52; *В. Крушкаль* (Новосибирск) 48—50, 52, 54; *А. Кулик* (Киев) 48—50, 52, 54, 55; *К. Куралбаева* (Алма-Ата) 50; *А. Курило* (Целиноград) 52; *К. Левин* (Киев) 49, 50; *С. Лесик* (Донецк) 49, 50; *А. Лосев* (Ленинград) 48—50, 55; *В. Лысенков* (Белорецк) 48—50, 52, 54, 55; *А. Мальцев* (п. Медведка Курской обл.) 49, 50, 52, 54; *И. Марков* (Киев) 48, 49, 52; *Т. Мартиросова* (Ташкент) 48—50, 52, 54; *В. Матвеев* (Москва) 48—50, 52, 54, 55; *А. Мельник* (Гайворон) 50; *А. Мельников* (Краснодар) 49, 52, 55; *О. Мельников* (Красноярск) 49, 50; *М. Мельцер* (Вильнюс) 48—50, 52, 54, 55; *С. Морозов* (Заволжье) 49, 52; *Ю. Морозов* (Тбилиси) 49; *Я. Мустафаев* (Баку) 48—50, 52, 54, 55; *А. Назарян* (Тбилиси) 48—50, 52, 54; *А. Натальин* (Ленинград) 52; *О. Наумов* (Заволжье) 52; *И. Онульский* (Киев) 52, 55; *О. Павлов* (Новосибирск) 49, 50, 52, 54, 55; *А. Павлунин* (Фрунзе) 49; *В. Павлунин* (Фрунзе) 52; *А. Плачко* (с. Великая Русава Винницкой обл.) 49; *В. Полищук* (Киев) 49, 50, 52; *Д. Прокофьев* (п. Сертолово Ленинградской обл.) 49, 50, 52, 54; *И. Пушкарев* (Киров) 52, 54, 55; *В. Рагулин* (Челябинск) 48—50; *Н. Рябова* (Харьков) 50, 52; *Р. Садреев* (Алма-Ата) 52, 55; *И. Сенишин* (Актюбинск) 54; *Л. Сергеев* (Жуковский) 50; *А. Силкин* (Свердловск) 49, 50, 52, 55; *И. Симакова* (Целиноград) 55; *Д. Синицкий* (Ленинград) 49, 50, 52; *С. Синякова* (Москва) 48—50, 52; *М. Скворцов* (п. Черноголовка Московской обл.) 50, 54; *А. Скопенков* (Саратов) 50, 52; *В. Слитинский* (Киев) 48—50, 52, 54, 55; *Д. Смиренников* (Подпорожье) 50, 52; *Л. Смирнова* (Киров) 48, 50, 52, 55; *А. Смоляк* (Москва) 49, 50; *И. Соловьев* (п. Черноголовка Московской обл.) 48—50; *А. Строев* (Москва) 52; *С. Тихонов* (Воронеж) 50, 52; *Ю. Томилов* (Киев) 49, 50, 52; *Д. Туляков* (Жданов) 49, 50, 52, 54; *А. Тхор* (Червоноград) 50; *В. Федоров* (Полтава) 49; *П. Федосеев* (Новгород) 48—50, 52; *В. Федотов* (Москва) 49, 50, 54; *Д. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 49, 50, 52, 54, 55; *В. Фельдшеров* (Алма-Ата) 50, 52, 55; *Ф. Фот* (Томск) 48—50, 52, 54, 55; *М. Фукс* (Москва) 50; *М. Хараба* (с. Надречное Тернопольской обл.) 49, 50; *О. Христенко* (Караганда) 49, 50, 52, 54; *Л. Цейтлин* (Харьков) 52; *А. Шаповал* (Киев) 48, 50, 55; *О. Шведов* (Москва) 52; *К. Щербаков* (Арзамас) 49, 50, 52; *Я. Эфендиев* (Баку) 49, 50, 52, 54, 55; *А. Яврян* (Ереван) 49, 50.

Физика

А. Андрианов (Кузнецовск) 60, 61; *Д. Андриенко* (Калинин) 67, 70, 72; *О. Армоник* (Гродно) 61; *А. Афонин* (Брест) 59, 61, 69, 70; *А. Баландин* (Воркута) 61; *С. Барарь* (п/о Боровуха Витебской обл.) 70; *С. Бекасова* (Старый Оскол) 70; *А. Белецкий* (Канев) 61; *С. Белоусов* (Ленинград) 59—61, 70, 72; *А. Белый* (Запорожье) 72; *А. Билибин* (Боровичи) 59, 60, 64, 66; *С. Бобровник* (Черновцы) 60, 61, 67, 69, 70, 72; *А. Болотников* (Кузнецовск) 60; *С. Бусленко* (Тула) 60, 70; *В. Быдзан* (Киев) 72; *С. Валюх* (Киев) 69, 70, 72; *И. Велиев* (Баку) 69; *К. Вербицкий* (Москва) 59—61, 66; *А. Винцюк* (Киев) 60, 70; *Д. Виткуп* (Киев) 60, 61, 66, 67, 70; *В. Вовк* (Барвенково) 61; *П. Вольфбейн* (Киев) 59—61, 64, 69, 70, 72; *С. Ганжур* (Петропавловск-Камчатский) 70; *Д. Гирис* (Омск) 70; *А. Гончаров* (Новосибирск) 59, 60, 64, 70, 72; *М. Гончаров* (п. Черноголовка Московской обл.) 60; *П. Горьков* (п. Черноголовка Московской обл.) 70; *Б. Гуревич* (Саратов) 59, 60, 70, 72; *С. Гурский* (Новый Роздол) 70; *С. Дворник* (п. Сарыозек Талды-Курганской обл.) 60, 64, 70; *Е. Демлер* (Новосибирск) 59—61, 64, 70, 72; *Е. Демченко* (Жданов) 59—61, 72; *С. Дронов* (Пущино) 64; *А. Езерский* (Минск) 59, 61, 64, 67, 70, 72; *А. Елжов* (Дубна) 60; *А. Ельяшевич* (Минск) 60; *В. Завадский* (Минск) 59, 60, 70; *В. Завражний* (Фрунзе) 70; *Л. Заломихина* (Старый Оскол) 70;

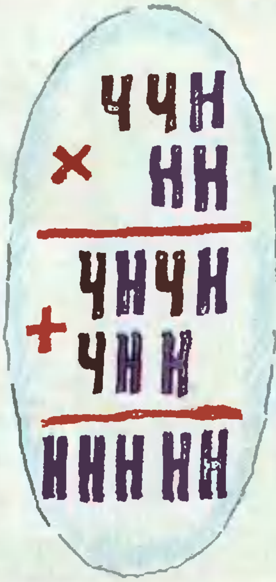
(Окончание см. на с. 38)

Задачи

1. Как перевезти в лодке с одного берега на другой козла, капусту, двух волков и собаку, если известно, что волка нельзя оставлять без присмотра с козлом и с собакой, собака «в ссоре» с козлом, а козел «неравнодушен» к капусте? В лодке только три места, поэтому можно брать с собой одновременно не более двух животных или одно животное и капусту.

2. В соревнованиях по стрельбе участвовало 30 человек. Первый стрелок выбил 80 очков, второй выбил 60 очков, третий выбил среднее арифметическое чисел очков у первых двух, четвертый — среднее арифметическое чисел очков у первых трех. И вообще, каждый следующий выбивал среднее арифметическое чисел очков, выбитых предыдущими стрелками. Сколько очков выбил последний стрелок?

3. Решите арифметический ребус, изображенный на рисунке, подставив вместо букв Ч четные цифры, а вместо букв Н — нечетные.



4. Почему лыжники и конькобежцы после финиша накидывают на себя пальто или одеяло, хотя на дистанции им было очень жарко?

5. Плоскость разбита на квадраты площадью 100 см^2. Как с помощью одной линейки (без делений) получить квадрат площадью 80 см^2?

Эти задачи нам предложили: *Е. В. Чернышов, Н. Я. Антонович, А. П. Савин, В. В. Произволов.*

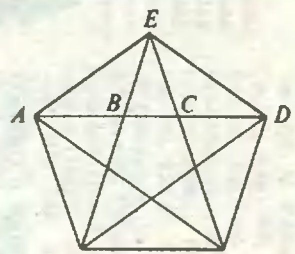
Калейдоскоп „Кванта"

Замечательные числа. Числа Фибоначчи

Числа Фибоначчи — это элементы числовой последовательности 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., в которой каждое число, начиная с третьего, является суммой двух предыдущих: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

Эти числа ввел итальянский математик Леонардо Пизанский (Фибоначчи) в «Книге абака» (1202). Он получил их как численность семейства кроликов, происходящих от одной пары, при условии, что каждая пара кроликов ежемесячно производит новую пару.

Числа Фибоначчи оказались связанными с числом $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ — «золотым сечением», а именно: $f_n = \frac{\tau^n - \tau^{-n}}{\sqrt{5}}$. Трудно поверить, что такая формула задает целые числа, но это так.



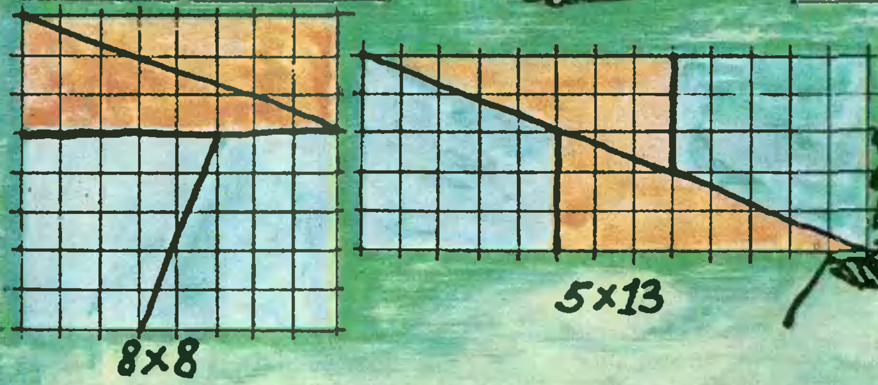
$AE:AB = AB:BC = AD:AC = \tau$

Оказалось, что числа Фибоначчи возникают в самых различных областях жизни. Например, если идти по дорожке, разделенной на n квадратов, каждый раз ступая на следующий квадрат или через один, то количество способов пройти такую дорожку равно f_n.

На подсолнухе семечки выстраиваются в спирали, причем количества спиралей, идущих в одну и в другую сторону, различны — они являются последовательными числами Фибоначчи (например, спиралей может быть 34 и 55). То же наблюдается и на плодах ананаса, где спиралей обычно бывает 8

Числа Фибоначчи 3, 5, 8, 13 фигурируют в любопытном геометрическом софизме, утверждающем, что «64 = 65», с помощью разрезания квадрата 8×8 и складывания из него прямоугольника 5×13. Такой же эффект дает любой набор чисел f_{2n-2}, f_{2n-1}, f_{2n}, f_{2n+1} $(n > 3)$.

Числа Фибоначчи возникают и при описании выигрышной стратегии в древней китайской игре «дзяньшицзы», в которой двое играющих берут по очереди камни из двух кучек: либо произвольное количество из одной кучки, либо поровну из двух (выигрывает игрок, берущий последний камень).



Обнаружено, что дроби вида a/b, соответствующие винтообразному расположению листьев на стебельке растения, часто являются отношениями последовательных чисел Фибоначчи. Для бука и орешника это отношение равно 2/3, для дуба и абрикоса — 3/5, для тополя и груши — 5/8, для ивы и миндаля — 8/13, и т. д.

Любопытные соотношения:

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1;$$

$$f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = f_n f_{n+1};$$

$$f_1 - f_2 + \ldots + (-1)^{n+1} f_n^2 = 1 + (-1)^{n+1} f_{n-1};$$

$$f_n^2 - f_{n-1} f_{n+1} = f_{n+2} f_{n-1} - f_n f_{n-1} = (-1)^n;$$

$$f_{n+m} = f_{n-1} f_m + f_n f_{m+1};$$

$$f_1 x + f_2 x^2 + \ldots + f_n x^n + \ldots = \frac{x}{1 - x - x^2},$$

в частности, при $x = \frac{1}{2}$ получаем

$$\frac{f_1}{2} + \frac{f_2}{4} + \ldots + \frac{f_n}{2^n} = 2;$$

$$1 = 1,\ 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1},\ 1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2},$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}} = \frac{5}{3}, \ldots,$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1\ldots}}} = \tau.$$

ЧТО И КАК МЫ ВИДИМ

Кандидат физико-математических наук
А. И. БУЗДИН,
кандидат физико-математических наук
С. С. КРОТОВ

Один физиолог, показавший действие слепого пятна, стал любимцем при дворе французского короля; на утомительных заседаниях со своими придворными король развлекался, «отрубая им головы»: он смотрел на одного из них и следил, как в это время «исчезала» голова другого.

(Из «Фейнмановских лекций по физике»)

В статье «Как однажды Жак-звонарь головой сломал фонарь...» (она была опубликована в прошлом году в декабрьском номере «Кванта») мы напомнили читателю, что разные цвета радуги соответствуют электромагнитным волнам разной длины: от 380 нм (фиолетовый цвет) до 770 нм (красный цвет). Именно электромагнитные волны указанного интервала и составляют видимый участок спектра. К нему непосредственно примыкают инфракрасные волны (более длинные) и ультрафиолетовые (более короткие). Хотя непосредственно глазом эти лучи не воспринимаются, их также относят к оптическому диапазону. Историческая причина этого состоит в том, что для изучения инфракрасных и ультрафиолетовых лучей также можно использовать оптические приборы, аналогичные тем, что применяются для видимого света.

За областью инфракрасных волн лежат волны радиодиапазона (длина волны от 0,1 мм до 10^4 м); за ультрафиолетовыми волнами — рентгеновское излучение (от 10^{-5} нм до 10^2 нм). Свойства радиоволн и волн рентгеновского диапазона сильно отличаются от свойств волн оптического диапазона, и для их изучения применяются принципиально иные методы.

Действие ультрафиолетового излучения вы наверняка ощущали на себе: под действием солнечного света, который содержит и ультрафиолетовые лучи, кожа покрывается загаром. Инфракрасное излучение тоже вам знакомо — вспомните рефлектор-обогреватель, принцип действия которого тот же, что и у прожектора, только в этом случае мы имеем дело с тепловым прожектором. Кстати, инфракрасные лучи еще называют тепловыми лучами.

Хочется обратить внимание читателя на то, что в свете сказанного понятие прозрачности является относительным — через обычное стекло хорошо видно, однако загореть невозможно (другое дело — кварцевое стекло); обычное стекло также плохо пропускает инфракрасные лучи.

Итак, глаз не восприимчив к инфракрасным и ультрафиолетовым лучам. Но и в видимом диапазоне чувствительность глаза также неодинакова к различным цветам. Иллюстрацией этому может служить кривая спектральной чувствительности глаза, которая в относительных единицах передает «остроту» восприятия глазом различных цветов (рисунок 1).

Вопрос о восприятии света и цвета человеком далеко не прост. Основная сложность состоит в том, что, помимо чисто физического преобразования световых сигналов, в формировании ощущения цвета большую роль играет нервная система человека.

Лучи света, попадающие в глаз, преломляются и образуют на сетчатке изображение предмета, который мы разглядываем. (Любопытно, что в древности существовало множество самых разнообразных теорий зрения. Хорошо известное выражение «свет очей» отражает как раз представление древних греков о том, что ощущение видимого возникает из-за

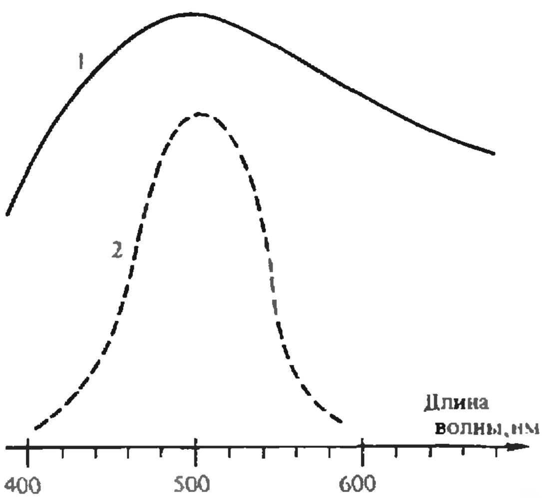


Рис. 1. Кривая 1 характеризует распределение энергии солнечного излучения по длинам волн, а кривая 2 описывает цветовую чувствительность глаза. Видно, что в солнечном свете на область фиолетовых лучей приходится меньше энергии, чем на синюю область; и глаз более чувствителен к синему цвету. Поэтому, хотя фиолетовые лучи рассеиваются сильнее, чем синие, доминирующим оказывается синий цвет, и небо мы видим голубым.

испускания глазами специального «флюида».) Сетчатка представляет собой разветвления зрительного нерва, и нервные окончания бывают двух типов — палочки и колбочки (эти названия связаны с формой). При слабом освещении зрение в основном обусловлено палочками, но, к сожалению, они не способны обеспечить цветовое зрение. За цветовое зрение ответственны колбочки, а они начинают «включаться» лишь при достаточном освещении. С этим, кстати, и связано происхождение выражения «ночью все кошки серы» — при очень слабом освещении все предметы кажутся обесцвеченными.

Слабый свет от звезд, доходящий к Земле, позволяет нам определить цвета лишь самых ярких из них; между тем, сделанные с помощью телескопа цветные снимки звездного неба поражают богатством и красотой красок — к сожалению, глазу они недоступны. Однако чувствительность нашего «бесцветного» зрения поистине удивительна: глаз может в принципе регистрировать даже единичные фотоны. Фотон — квант электромагнитного колебания, как бы самая малая энергетическая порция излучения. (Здесь мы сталкиваемся с тем, что, согласно квантовой теории, свет, с одной стороны, электромагнитная волна, а с другой стороны, поток частиц — квантов или фотонов.)

Как мы уже говорили, формирование цветового ощущения — сложный процесс. Светочувствительные клетки глаза связаны не только с мозгом, но и друг с другом. Глаз как бы сам проводит первичную обработку световой информации. Неслучайно при развитии зародыша глаз формируется путем вырастания волокон непосредственно из мозга, и по сути дела он является частью мозга.

Кстати, то место на сетчатке, откуда выходит, разветвляясь, зрительный нерв, лишено световой чувствительности — там нет палочек и колбочек; оно носит название «слепое пятно». Если изображение предмета на сетчатке попадает на слепое пятно, то предмет не виден. Открыл

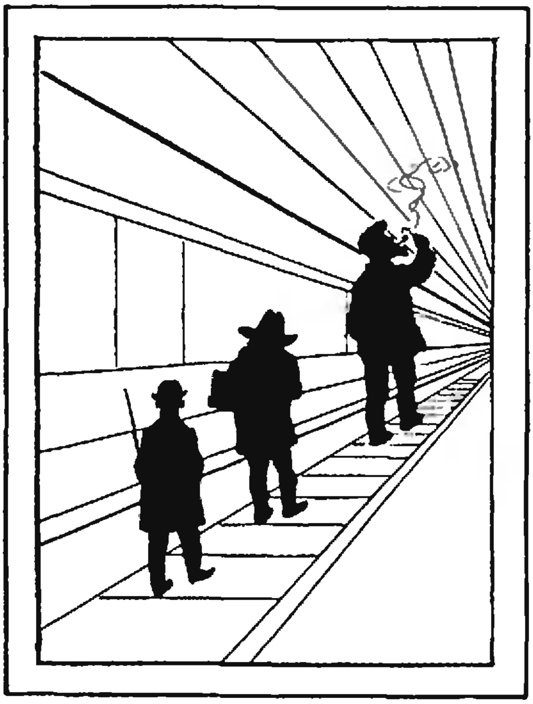


Рис. 2.

слепое пятно известный физик Мариотт, сообщение об этом феномене было им сделано на заседании Парижской академии в 1666 году. Он же был тем «физиологом» (из эпиграфа к статье), который научил французского короля гуманному способу «отрубать головы» своим придворным.

Важную роль мозга при восприятии внешних образов иллюстрирует такой пример. Если человек станет носить очки, которые делают изображение перевернутым, то сначала человек все будет видеть «вверх ногами». Однако через некоторое время восприятие внешних образов станет привычным. А вот после снятия очков предметы будут казаться перевернутыми, и потребуется определенное время, чтобы все стало на свои места.

Посмотрите теперь на рисунок 2, где изображены три человечка. Кажется совершенно очевидным, что нижний намного меньше верхнего. Линейка, однако, докажет вам, что все человечки одной высоты. Все дело здесь в лучевых линиях, которые создают ощущение перспективы. Также трудно поверить, что прямые на рисун-

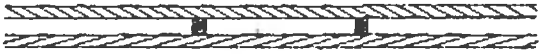


Рис. 3.

ке 3 параллельны. Подобного рода эффекты доставляли неприятности архитекторам еще в древнейшие времена: чтобы очертания постройки казались прямыми, их при строительстве приходилось искривлять. Пожалуй, наиболее яркое впечатление создают картины голландского художника Эшера, наглядно иллюстрирующие условность нашего восприятия (репродукция картины Эшера помещена на второй странице обложки этого номера).

А как вы думаете, почему возникают перед глазами цветные круги, если в полной темноте задеть головой о дверной косяк? а если о фонарь?

Наш глаз плохо приспособлен для строгого анализа цветового состава света. Для этой цели лучше использовать физические приборы (простейший из них — призма). Зато, смешивая в определенной пропорции всего лишь три цвета, например красный, желтый и синий, можно получить практически любой цвет (по крайней мере, ощущение цвета). Это, кстати, широко используется в цветном телевидении. Все краски на экране цветного телевизора возникают в результате соответствующего наложения трех основных цветов. Аналогично, всего три краски используются и при цветной печати. Так, смешав желтую и синюю краски, мы получим зеленый цвет, направив на экран желтый и синий лучи, мы увидим зеленое пятно. Совершенно ясно, что полученный таким способом зеленый цвет вовсе не есть «чистый» зеленый цвет, который входит в состав радуги и отвечает электромагнитной волне определенной длины. Просто-напросто в двух этих случаях создается одинаковое ощущение цвета. Несмотря на сказанное, богатство красок, воспринимаемых человеческим глазом, очень велико — хорошие художники различают до трехсот оттенков.

И в завершение — еще один «цветной» сюжет, из области... физики элементарных частиц. Выдуманные крупнейшим физиком-теоретиком современности Гелл-Маном экзотические крупицы материи — кварки — не только получили право на не совсем обычное существование (в свободном состоянии они находиться не могут), но и приобрели еще и «окраску». Они бывают трех «цветов» — красного, зеленого и синего. Обычный протон, состоящий из трех «разноцветных» кварков, будет по этой теории «белым», т. е. «бесцветным». Смешивая эти три цвета в разных комбинациях, можно получить любой другой цвет видимого спектра, что и применяется в цветном телевидении.

Таким образом, современная физическая наука способна с уверенностью говорить о цвете даже таких объектов, непосредственную возможность наблюдения которых она с не меньшей уверенностью отвергает. Поистине, человеческое воображение не имеет пределов...

И прежде чем поставить точку, предлагаем вам подумать над такими вопросами.

1. Известно, что, загорая в полдень, можно просто «сгореть». А вот опасность солнечного ожога в утренние и вечерние часы практически «нулевая». Почему?

2. Если смотреть на луч прожектора сбоку, то он кажется изогнутым. Почему?

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 30)

Ф. Занин (Старый Оскол) **70, 72**; *Д. Звонов* (Челябинск) **61, 70**; *Д. Зеленский* (Семипалатинск) **61, 69**; *С. Зеленский* (Семипалатинск) **69**; *Е. Зельцер* (Киев) **60, 61, 64, 66, 67, 70**; *А. Зискинд* (Винница) **60, 69, 70**; *Я. Зубков* (Алма-Ата) **72**; *К. Зуев* (Вологда) **61, 70**; *И. Илиев* (Плевен, НРБ) **60**; *А. Исаков* (Калининград) **59, 61**; *М. Ифеев* (Москва) **69, 70, 72**; *С. Казенас* (Алма-Ата) **69, 70**; *Е. Казьмирук* (п. Черноголовка Московской обл.) **60, 70**; *А. Каипов* (Алма-Ата) **72**; *В. Каменькович* (Харьков) **60, 64, 69**; *М. Камцева* (Старый Оскол) **70**; *В. Камчатный* (Киев) **72**; *А. Капустин* (Москва) **59—61, 70, 72**; *А. Клочанов* (Алма-Ата) **61, 70**; *М. Ковалев* (Губкин) **72**; *А. Колесник* (Старый Оскол) **61**; *А. Комник* (Старый Оскол) **60, 70**; *А. Коновалов* (Мытищи) **61**; *И. Коновалов* (Киев) **72**; *Е. Корсунский* (Харьков) **59—61, 72**; *А. Коршков* (Мозырь) **64, 70, 72**; *А. Корытько* (Киев) **60**; *М. Кравченко* (Казань) **70**; *Ю. Кравченко* (Москва) **59—61, 67, 70, 72**; *В. Куклев* (Ленинград) **60, 67**; *Ю. Кумпан* (Москва) **70**; *О. Кушнир* (Дубляны) **60, 70**; *С. Лапин* (Саратов) **72**; *Ю. Левин* (Харьков) **64**; *В. Лендерман* (Киев) **60, 70**; *А. Лосев* (Ленинград) **70**; *И. Лохтин* (Москва) **60, 70**; *О. Лугуев* (Махачкала) **60, 61**; *А. Лутовинов* (Мичуринск) **70**; *А. Львовский* (Москва) **61**; *А. Мазуренко* (Минск) **59—61, 64, 67, 69, 70, 72**; *А. Майков* (Старый Оскол) **60, 61, 70**; *А. Маливанчук* (Киев) **60, 61, 70, 72**; *Р. Малков* (Саратов) **59—61, 64, 66, 69, 70, 72**; *А. Малышев* (п. Медвянка Курской обл.) **59—61**; *А. Мамаев* (Заволжье) **64**; *А. Мацко* (Киев) **60, 61, 72**; *И. Межуев* (Коломна) **59**; *А. Мелеховец* (Брест) **72**; *В. Меркер* (Старый Оскол) **70, 72**; *А. Мина* (Киев) **72**; *Н. Михайловский* (Красноярск) **59—61**; *Я. Михеев* (Киев) **72**; *Е. Моисеев* (Запорожье) **72**; *В. Мороз* (Ленинград) **59—61, 64, 67**; *К. Недбаев* (Брест) **72**; *А. Никитин* (Ленинград) **60, 61, 64**; *К. Николаев* (п. Черноголовка Московской обл.) **70, 72**; *А. Никонюк* (Ровно) **70**; *А. Новик* (Мозырь) **61, 69, 70, 72**; *Д. Ноготков* (Алма-Ата) **70**; *С. Ночевный* (Запорожье) **60, 72**; *А. Окунев* (Гродно) **61, 72**; *В. Ольховец* (Киев) **70, 72**; *З. Османов* (Тбилиси) **61**; *В. Павлунин* (Фрунзе) **70**; *Д. Пастухов* (Москва) **60, 66, 67, 69, 70, 72**; *К. Пенанен* (Одесса) **59—61, 64, 67, 69, 70, 72**; *И. Петков* (Враца, НРБ) **60**; *Л. Петько* (Минск) **60, 64, 67, 69, 70**; *А. Подтележников* (Харьков) **59—61, 64, 69, 70, 72**; *О. Покрамович* (д. Скоки Брестской обл.) **59—61, 72**; *П. Полынкин* (Тула) **61, 69, 70**; *Л. Пономаренко* (Буск) **59**; *Д. Почуев* (Харьков) **60, 61**; *У. Рахманов* (Новосибирск) **72**; *А. Резуненко* (Харьков) **60**; *А. Рожков* (Калининград) **69, 70, 72**; *А. Рыжов* (Горький) **60, 69, 70, 72**; *Р. Сагайдак* (с. Матусов Черкасской обл.) **59, 60, 69, 72**; *А. Садыков* (Казань) **70**; *С. Сазонов* (Климовск) **59—61, 66, 70**; *В. Сакбаев* (Пушкино Московской обл.) **70**; *А. Свердлов* (Ленинград) **70**; *В. Свидзинский* (Киев) **60, 64, 67, 70**; *М. Сергазин* (Алма-Ата) **70, 72**; *А. Сибиряков* (Томск) **59, 61, 64, 70, 72**; *А. Сидоров* (Молодечно) **60, 69**; *Т. Ситько* (Киев) **72**; *М. Соколов* (Одинцово) **60, 61, 64, 66**; *А. Стародубов* (Алма-Ата) **70**; *М. Субботин* (Старый Оскол) **70, 72**; *В. Суклиян* (Одесса) **61**; *А. Супруненко* (Киев) **70**; *З. Таварткиладзе* (Тбилиси) **60, 64**; *Д. Тильга* (Алма-Ата) **69, 70**; *А. Тодоров* (Ярославль) **61, 67**; *И. Тодощенко* (Пермь) **59, 60, 64, 69, 70, 72**; *О. Толмачев* (Киев) **72**; *А. Толстых* (Днепродзержинск) **70, 72**; *Ю. Туркин* (Луцк) **61**; *Ю. Уваров* (Ленинград) **60, 61, 64**; *А. Усинский* (с. Птичья Ровенской обл.) **59, 64, 69, 72**; *Е. Устимова* (Старый Оскол) **70**; *Е. Ушаков* (Старый Оскол) **66, 70**; *В. Федотов* (Москва) **72**; *Г. Фейгин* (Тула) **60, 70**; *С. Фираго* (Шклов) **59—61, 72**; *Ф. Фот* (Воронеж) **61, 70, 72**; *И. Фролов* (Москва) **60, 61, 67, 70**; *С. Хайретдинов* (Киев) **70**; *М. Хараба* (с. Надречное Тернопольской обл.) **59, 60**; *И. Химони* (Днепропетровск) **72**; *А. Хисамов* (Уфа) **59**; *Х. Ходжаев* (Касансайский р-н Наманганской обл.) **72**; *И. Чайка* (Кузнецовск) **59—61, 66, 67, 70**; *О. Чанов* (Брест) **60, 72**; *А. Черепицкий* (п/о Назимово Псковской обл.) **60**; *О. Черных* (Старый Оскол) **70**; *Р. Чистов* (Рига) **70**; *В. Чуев* (Старый Оскол) **70, 72**; *Я. Шанина* (Старый Оскол) **70, 72**; *В. Шварцман* (Брест) **72**; *О. Шведов* (Москва) **67, 72**; *С. Шинкевич* (Березники) **60, 61, 64, 70, 72**; *О. Шиховцев* (Верхняя Салда) **70**; *А. Шишкин* (Уфа) **60**; *С. Штовба* (Винница) **60, 69, 70, 72**; *В. Южанинов* (Мозырь) **61**; *А. Яблоков* (с. Рождественское Костромской обл.) **61**; *И. Ягольницер* (Черновцы) **70**; *В. Янкевич* (Витебск) **67**; *И. Ясников* (Тольятти) **60, 72**.

Новые книги издательства «Наука»

Готовятся к печати:

Богатырев Г. И., Боковнев О. А. *Пособие по математике для подготовительных курсов техникумов на базе 8 классов средней школы.* Учебное пособие. Изд. 2-е, перераб. 23 л. 80 к.

Задачи по физике. Учебное пособие. Под ред. О. Я. Савченко. Изд. 2-е, перераб. 26 л. 1 р. 10 к.

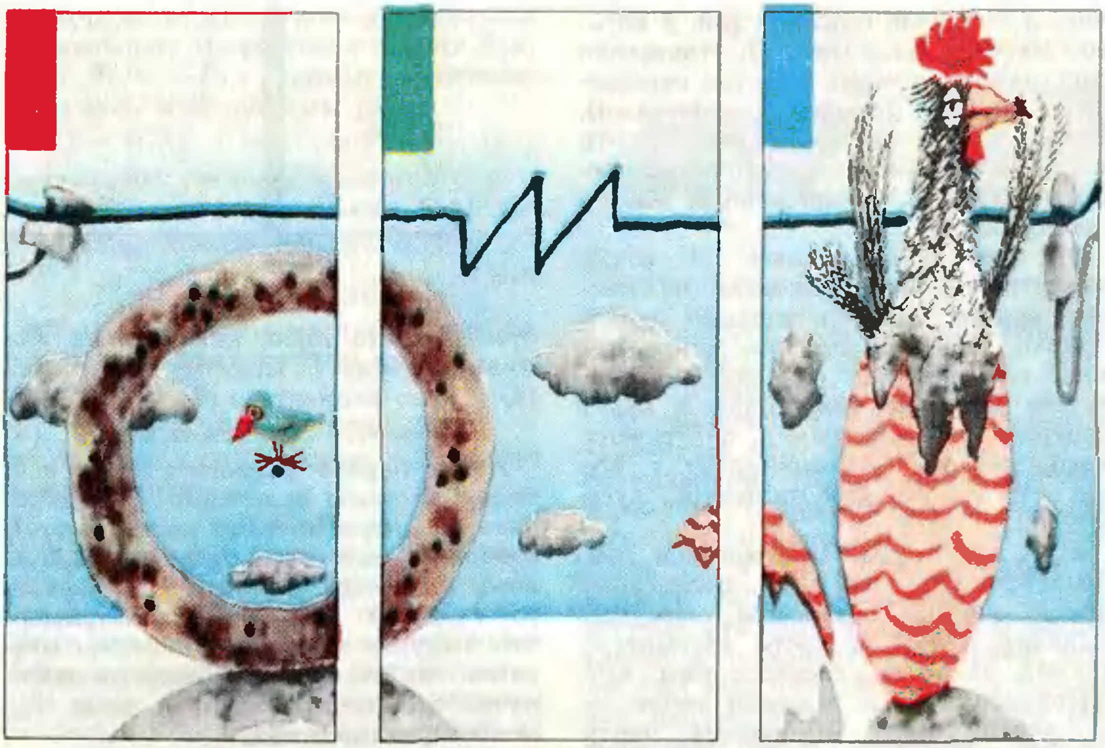
Зельдович Я. Б., Хлопов М. Ю. *Драма идей в познании природы (частицы, поля, заряды).* (Библиотечка «Квант»). 10 л. 40 к.

Пособие по математике для поступающих в вузы. Учебное пособие. Под ред. Г. Н. Яковлева. Изд. 3-е, перераб. 41 л. 1 р. 50 к.

Сборник задач и вопросов по физике для средних специальных учебных заведений. Учебное пособие. Под ред. Р. А. Гладковой. Изд. 7-е, перераб. 22 л. 1 р.

Стасенко А. Л. *Физика полета.* (Библиотечка «Квант»). 10 л. 40 к.

(Окончание см. на с. 59)



Школа в „Кванте"

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Что такое центр масс» предназначена восьмиклассникам, заметка «Как в металле протекает электрический ток?» — девятиклассникам, «О машине времени и теории относительности» — десятиклассникам.

Что такое центр масс

Если вы бросите камень под углом к горизонту, он, как известно, полетит по параболе. А если бросить длинную палку, да еще закрутить ее как следует? Конечно, разные точки палки движутся по-разному, описывая довольно сложные траектории, но полет палки в целом чем-то похож на полет камня: подъем, верхнее положение, спуск. Мало того, если пренебречь сопротивлением воздуха, то движение одной определенной точки палки ничем не будет отличаться от движения камня, свободно летящего по параболе. Эта точка — центр масс палки.

Центр масс существует у любого тела, более того — у любой системы тел. Он обладает замечательными свойствами, с некоторыми из них вас познакомит эта заметка.

Начнем с определения положения центра масс. Рассмотрим систему материальных точек с массами $m_1, \ldots, m_n$. Как, зная их координаты, найти координаты этой «самой важной точки»? Ответ выглядит так:

$$x_{цм}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}, \qquad (1)$$

аналогично для координат $y_{цм}$ и $z_{цм}$. Почему именно так определяется центр масс, станет ясно позднее, когда мы рассмотрим его динамические свойства. А пока освоимся с выражением (1), обсудив несколько связанных с ним вопросов.

а) В случае двух точек массами m_1 и m_2 выражение для $x_{цм}$ имеет наглядный смысл: центр масс лежит между точками, ближе к той, у которой масса больше (рис. 1); отношение расстояний до точек обратно отношению их масс (проверьте это сами). Ясно, что в общем случае центр масс лежит где-то между точками системы, отражая распределение масс в пространстве.

б) Все материальные точки «участвуют» в определении положения центра масс совершенно равноправно. Значит, если расположение масс симметрично относительно какой-то точки, то эта точка и будет центром масс. Например, центр масс однородного шара совпадает с его центром (то же для цилиндра, куба и т. п.).

в) И еще одно. Оказывается (попробуйте это доказать), положение центра масс не изменится, если мы, выделив какую-то часть рассматриваемой системы, сосредоточим всю массу этой части в одной точке — ее центре масс. Например, центр масс проволочного треугольника совпадает с центром масс системы трех точек, расположенных в серединах сторон (массы точек равны массам соответствующих сторон).

Перейдем теперь к самому главному — изучению физических свойств центра масс.

Пусть за малое время Δt точки переместятся на $\vec{s}_1$, ..., $\vec{s}_n$. Тогда, как видно из (1), перемещение центра масс будет равно

$$\vec{s}_{цм}=\frac{m_1\vec{s}_1+m_2\vec{s}_2+...+m_n\vec{s}_n}{m_1+m_2+...+m_n}$$

(напомним, что проекции вектора перемещения на оси равны изменениям соответствующих координат). Разделив перемещение на Δt, найдем скорость центра масс:

$$\vec{v}_{цм}=\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+...+m_n\vec{v}_n}{m_1+m_2+...+m_n}. \qquad (2)$$

Обратите внимание — в числителе

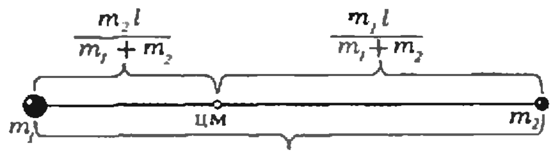


Рис. 1.

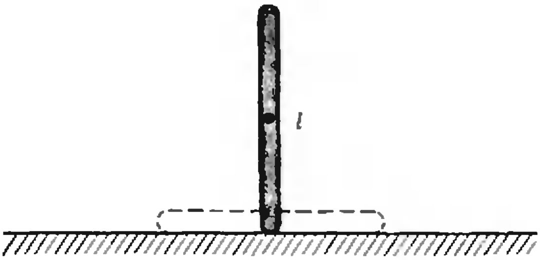


Рис. 2.

стоит не что иное, как полный импульс системы $\vec{P}$. Поэтому выражение (2) можно записать в виде

$$\vec{P}=(m_1+m_2+...+m_n)\vec{v}_{цм}. \qquad (3)$$

Итак, первое свойство: если всю массу системы мысленно сосредоточить в центре масс, то импульс этой воображаемой точки будет равен полному импульсу системы. Что из этого следует? Мы знаем, например, что импульс замкнутой системы сохраняется. Значит, если система замкнута, скорость ее центра масс $\vec{v}_{цм}$ остается постоянной.

Рассмотрим пример. Однородная тонкая палочка длиной l стоит вертикально на гладком полу (рис. 2). Ее отпускают, после чего она падает плашмя. Как узнать на сколько сдвинется нижний конец палочки к моменту падения? Одна палочка в поле тяготения не является замкнутой системой; но, раз на нее действуют только вертикальные силы, горизонтальная проекция ее импульса не меняется, в нашем случае — остается равной нулю. Значит, центр масс не смещается в горизонтальном направлении, т. е. центр палочки упадет в то место, где она стояла, а ее нижний конец сместится на $l/2$.

Продолжим обсуждение свойств центра масс. Рассмотрим систему двух материальных точек массами m_1 и m_2. Пусть эта система не замкнута, т. е. на каждое тело действуют как внутренние, так и внешние силы. Исходя из второго закона Ньютона, запишем изменение импульса каждой точки за время Δt:

$$m_1\Delta\vec{v}_1=(\vec{F}_1+\vec{F}_{12})\,\Delta t,$$
$$m_2\Delta\vec{v}_2=(\vec{F}_2+\vec{F}_{21})\,\Delta t,$$

где $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ — внешние силы, $\vec{F}_{12}$ — сила, действующая на первую точку со стороны второй, $\vec{F}_{21}$ — соответственно, наоборот. По третьему закону Ньютона $\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$, поэтому изменение импульса всей системы равно

$$\Delta\vec{P}=m_1\Delta\vec{v}_1+m_2\Delta\vec{v}_2=(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\,\Delta t$$

— импульс системы меняется только под действием внешних сил. С другой стороны, из выражения (3) следует, что

$$\Delta\vec{P}=(m_1+m_2)\,\Delta\vec{v}_{\text{цм}}.$$

Отсюда для центра масс получаем соотношение, аналогичное второму закону Ньютона:

$$(m_1+m_2)\Delta\vec{v}_{\text{цм}}=(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\Delta t,$$

которое можно переписать в более привычном виде:

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2=(m_1+m_2)\vec{a}_{\text{цм}}. \qquad (4)$$

Это — самое главное: центр масс движется так, как будто в нем сосредоточена вся масса системы и к нему приложены все внешние силы. Обратите внимание — именно внешние силы. Внутренние силы системы вообще не влияют на движение ее центра масс. Вот почему движение этой точки во многих случаях оказывается достаточно простым.

Это свойство центра масс имеет многочисленные приложения. Например, теперь вам, наверное, ясно, почему середина палки, брошенной под углом к горизонту (о которой шла речь в самом начале заметки), движется, как и камень, по параболе. В отсутствие трения о воздух внешняя сила равна $m\vec{g}$, и, значит, ускорение центра масс, как и ускорение камня, равно $\vec{g}$, независимо от того, происходит ли вращение палки.

Разберем такой пример. Подъемный кран подает на строительную площадку тяжелую плиту. Чтобы развернуть эту плиту, двое рабочих толкают ее в точках A и B с одинаковой по модулю силой (рис. 3). Относительно какой точки начнет поворачиваться плита? Ручаемся, что многие из вас сразу же ответят так: конечно, относительно точки C, лежащей посередине между точками A и B. Не торопитесь! Правильный ответ: относительно точки O — центра масс плиты. Посмотрите на уравнение (4). Раз сумма внешних сил равна нулю, значит, равно нулю ускорение центра масс — он и будет оставаться в покое.

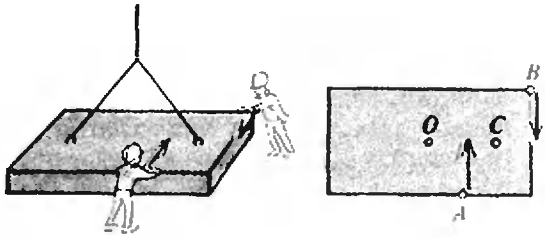


Рис. 3.

В заключение — еще об одном «удобстве» центра масс. Как следует из уравнения (3), в системе отсчета, связанной с центром масс, полный импульс системы тел равен нулю. Ясно, что в такой системе движение должно выглядеть проще — ведь система как целое покоится. Особенно удобно использовать этот прием, если система замкнута. Ведь тогда ускорение центра масса равно нулю (см. уравнение (4)), и связанная с ним система отсчета является инерциальной. Например, центральный удар двух упругих шаров в такой системе выглядит так просто, что можно сразу угадать ответ: после удара шары разлетаются с такими же скоростями, с какими они вначале сближались. Подумайте сами, почему это так.

А. И. Черноуцан

Как в металле протекает электрический ток?

Этот вопрос обычно не вызывает затруднений у школьников. Как протекает? Да очень просто. Если между концами проводника, например металлического, поддерживать разность потенциалов, то в нем возникает электрическое поле. Действуя на имеющиеся в металле свободные электроны, это поле придает им ускорение в направлении того конца проводника, потенциал которого выше (заряд электронов отрицательный). Возникает направленное движение зарядов, которое и является электрическим током.

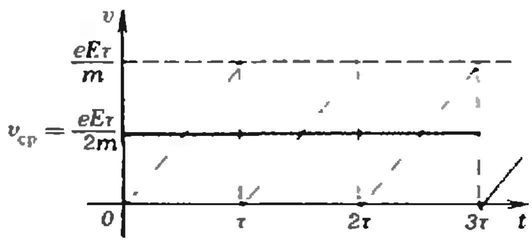
Нельзя сказать, что такой ответ ошибочен. Все слова в нем верны. Однако этот, на первый взгляд исчерпывающий, ответ сразу же вызывает целый ряд других вопросов и возражений. Попробуем в них разобраться.

Как движутся электроны при создании между концами проводника разности потенциалов? Казалось бы, ускоренно, ведь на них все время действует сила $\vec{F}=e\vec{E}$ ($\vec{E}$ — напряженность электрического поля в проводнике). Но, с другой стороны, если бы это действительно было так, то сила тока в любом сечении проводника со временем возрастала бы, что противоречит закону Ома — при постоянном напряжении сила тока, протекающего по проводнику, постоянна: $I=U/R$. Как же быть? Вспомним о внутреннем устройстве металла.

Валентные электроны атомов металлов связаны с атомами весьма слабо. Поэтому при образовании кристаллической решетки они легко отрываются от атомов и образуют довольно плотный электронный газ (даже если от каждого атома оторвется лишь по одному электрону, то их концентрация в таком газе окажется порядка $n\sim$ $\sim10^{29}$ $1/м^3$, в чем вы можете убедиться самостоятельно). Рассуждая выше о протекании тока через металл, мы считали эти электроны свободными. В определенном смысле это верно, но не следует забывать и об их окружении — ионной кристаллической решетке.

Созданная в конце XIX — начале XX веков классическая электронная теория сопротивления металлов предполагала, что в процессе движения под действием электрического поля электроны сталкиваются с ионами кристаллической решетки. Среди этих столкновений бывают и такие, при которых электроны всю приобретенную при разгоне в электрическом поле энергию передают решетке. Именно такие столкновения, их называют эффективными, и ответственны за сопротивление металла. Остальные столкновения для понимания механизма протекания тока можно не принимать в расчет (после них изменяется лишь направление скорости электронов, но не ее величина).

Пусть среднее время между соударениями есть τ. Тогда можно представить себе следующую модель движения электрона в металле, в котором создано электрическое поле. В интервале времени от 0 до τ электрон движется с ускорением $\vec{a}=e\vec{E}/m$, и, следовательно, проекция скорости его направленного движения против поля $\vec{E}$ линейно возрастает со временем: $v=at=eEt/m$. В момент времени τ электрон сталкивается с ионом и полностью передает кинетическую энергию своего направленного движения решетке. Далее он снова ускоряется электрическим полем, и процесс повторяется. График зависимости проекции скорости упорядоченного движения от времени приведен на рисунке.



Такое кусочно-равноускоренное движение можно представить себе как равномерный дрейф электрона в направлении, противоположном полю, со скоростью $v_{ср}=eE\tau/(2m)$. Вычислим связанную с этим движением силу тока.

Число электронов, проходящих через сечение S проводника за время Δt, есть $\Delta N=nSv_{ср}\Delta t$. При этом переносится заряд $\Delta q=e\Delta N=neSv_{ср}\Delta t$. Следовательно, в проводнике протекает ток

$$I=\frac{\Delta q}{\Delta t}=nev_{ср}S=\frac{ne^2\tau}{2m}SE.$$

Величина

$$j=\frac{I}{S}=\frac{ne^2\tau}{2m}E$$

называется плотностью тока.

Оказывается, полученный нами коэффициент при напряженности поля E, который составлен только из микроскопических характеристик металла, есть не что иное, как величина, обратная удельному сопротивлению металла ρ.

Ну вот, кое-что стало проясняться. Однако вопросы еще остались. Давайте, например, оценим среднюю скорость направленного движения электронов. Пусть по медному проводнику сечением, скажем, 10 мм^2 и концентрацией электронов $n=1{,}67\cdot10^{29}$ 1/м^3 протекает ток $I=10$ А. Тогда средняя скорость

$$v_{\text{ср}}=\frac{I}{neS}\approx0{,}04\ \text{мм/с}.$$

Если же по известному из эксперимента значению ρ определить время между эффективными соударениями, то окажется, что $\tau\sim10^{-14}$ с. Поэтому, если предполагать, что пробег между эффективными соударениями происходит со средней скоростью $v_{\text{ср}}\sim\sim0{,}1$ мм/с, то мы приходим к абсурдному утверждению: расстояние между двумя соударениями электрона составляет $l=v_{\text{ср}}\tau\sim10^{-18}$ м, что на много порядков меньше расстояния между ближайшими ионами в решетке. Следовательно, мы снова чего-то не учли. А не учли мы того, что частицы электронного газа в металле, подобно молекулам идеального газа в сосуде, находятся в постоянном хаотическом движении. Однако, если воспользоваться такой аналогией и вместо $v_{\text{ср}}$ подставить в выражение для l тепловую скорость $v_{\text{т}}=\sqrt{3kT/m}$ (см. § 11 «Физики 9»), то этого все равно окажется недостаточно для согласия с опытными данными (убедитесь в этом самостоятельно).

Мы исчерпали возможности классической физики. В действительности последовательная теория сопротивления металлов была построена только в середине двадцатого века с помощью представлений квантовой физики. Оказалось, что электроны в металле движутся с гигантскими скоростями $v_e\sim0{,}01c$ (c — скорость света в вакууме). Это хаотическое движение частиц электронного газа имеет чисто квантовое, а не тепловое происхождение — оно не прекращается даже при абсолютном нуле температуры. Но и при столь огромных скоростях хаотического движения электронов в отсутствие электрического поля средний перенос заряда через выделенное сечение проводника равен нулю. При включении электрического поля на это хаотическое движение накладывается упорядоченный дрейф электронов против поля — как это уже было описано выше. Расстояние же между двумя последовательными соударениями определяется именно большой скоростью хаотического движения и составляет для взятого нами конкретного медного проводника несколько десятков (а может быть, даже сотен) межатомных расстояний, что уже вполне правдоподобно.

И, наконец, последняя неожиданность. Согласно законам квантовой механики, электрон в идеальной периодической кристаллической решетке двигается так, что он... никогда не сталкивается с ионами, ее образующими. А как же быть тогда со всеми нашими предыдущими умозрительными построениями? Как же тогда электроны при своем движении в кристалле передают свою энергию решетке?

Оказывается, при низких температурах электроны сталкиваются с примесными атомами и другими дефектами, всегда имеющимися в решетке реального кристалла. Устраняя их, сопротивление кристаллического металла можно делать все меньше и меньше. При комнатных же температурах электроны в основном рассеиваются на... колебаниях решетки. Если в неподвижной решетке они еще могли «строить» свое поведение так, чтобы «обойти» все периодически повторяющиеся ионы, то когда последние совершают тепловые колебания, электроны уже никак не могут «уследить» за их хаотическим движением и неизбежно сталкиваются то с одним, то с другим.

Вот, вкратце, какие «подводные камни» встретились нам при внимательном рассмотрении, казалось бы, такого ясного вопроса.

А. А. Варламов

О машине времени и теории относительности

В восьмой главе курса физики для 10 класса вы познакомились с постулатами специальной теории относительности (СТО) и основными следствиями из них. Одно из положений СТО утверждает, что одновременность пространственно разделенных событий относительна, т. е. зависит от того, в какой системе отсчета ведется наблюдение. Это утверждение, как и многие другие, относящиеся к теории относительности, кажется странным, даже парадоксальным и уж во всяком случае противоречащим здравому смыслу. А почему?

С первых шагов научной фантастики одним из излюбленных приемов жанра стало «перемещение во времени». Многие авторы используют его для создания красивого «временно́го парадокса», абсурдного замыкания цепочки событий. Так, героиня одного фантастического рассказа перемещается в предыдущее столетие и знакомится с симпатичным юношей, который, как ей известно, должен стать автором замечательных открытий. Именно так и происходит, но только благодаря тому, что сама героиня, обладая хорошей памятью, вовремя излагает ему все детали очередного открытия, известного ей из «будущих» учебников и монографий. Как вы понимаете, никто ничего не открывал. Просто из-за перемещения во времени следствие (героиня рассказа знает детали открытия) произошло раньше причины (совершение самого открытия), что и привело к парадоксу.

Чтобы таких парадоксов не возникало, нельзя, как подсказывает здравый смысл, менять местами прошлое и будущее.

— Стоп! — скажете вы.— В таком случае, что-то не в порядке с теорией относительности. Ведь относительность одновременности означает, что для разных наблюдателей порядок следования событий во времени может быть различным.

Поясним это на конкретном примере. Рассмотрим неподвижно стоящую на рельсах очень длинную платформу *A*, на концах которой находятся два приемника света, и два поезда *B* и *C*, едущих вправо и влево соответственно. В какой-то момент времени в точке, расположенной точно посередине между приемниками, производится мгновенная вспышка света. Назовем это событием № 1. Тогда событие № 2 — луч света фиксируется левым приемником и событие № 3 — луч света фиксируется правым приемником. Ясно, что в системе отсчета, связанной с платформой *A*, события № 2 и № 3 происходят *одновременно*. Однако в системе отсчета, связанной с поездом *B*, который едет вправо, событие № 3 произойдет *раньше*, чем событие № 2, так как правый приемник в этой системе движется навстречу лучу света, а левый приемник от луча света убегает. В системе же отсчета, связанной с поездом *C*, который едет влево, событие № 3 произойдет *позже*, чем событие № 2. Все дело тут, конечно, в том, что для всех трех наблюдателей свет распространяется с одной и той же скоростью (в соответствии со вторым постулатом СТО).

Получается, что с появлением СТО само понятие «раньше-позже» стало относительным. То, что в одной системе отсчета было «раньше», в другой системе может оказаться «позже».

— Все это выглядит очень странным,— скажете вы.— Как мы видели, менять события местами во времени чревато серьезными последствиями.

Оказывается, все не так страшно. Лишая абсолютного смысла понятия «раньше-позже» и «одновременно», СТО никогда не приводит к нарушению причинно-следственных связей между событиями. Если одно событие является следствием другого, то в любой системе отсчета оно будет происходить позже. Обратите внимание — во всех трех системах отсчета (*A*, *B* и *C*) событие № 1 (испускание света) происходит рань-

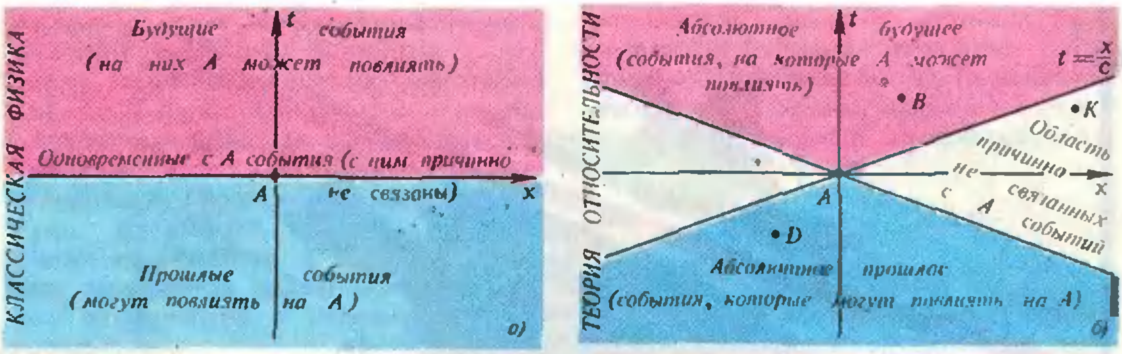


Схема абсолютной (не зависящей от системы отсчета) классификации событий. Для простоты оставлена лишь одна пространственная координата, т. е. каждому событию соответствует точка на плоскости «пространство (x) — время (t)».

ше, чем события № 2 и № 3 (прибытие этого света на приемники). Оно происходит раньше с точки зрения любого наблюдателя — ни в одной системе отсчета не может свет сначала прийти на приемник, а потом излучиться источником. Вывод ясен: неправильно было бы утверждать, что *любые* два события можно, изменив систему отсчета, поменять местами во времени.

Когда же это возможно, а когда нет? Начнем с другого конца — постараемся установить, когда между двумя событиями может существовать причинно-следственная связь.

В классической (доэйнштейновской) физике на этот вопрос существовал следующий простой ответ: если одно событие происходит позже другого, то оно может быть его следствием, независимо от того, где эти события происходят. Дело в том, что не было никаких оснований полагать, что скорость передачи информации (сигналов) чем-то ограничена. Тогда, если даже событие B произошло очень далеко от события A и совсем ненамного позже, можно, используя сигнал достаточно большой скорости, передать в точку B информацию о событии A еще до наступления события B. Получается, что любое нарушение временной последовательности событий «раньше-позже» могло привести к нарушению причинно-следственных связей. Поэтому естественно, что понятия «раньше-позже» и «одновременно» в классической физике были абсолютными, т. е. не могли зависеть от системы отсчета (см. рисунок).

В соответствии с теорией относительности никакой сигнал не может распространяться со скоростью, большей скорости света в вакууме c. Исходя из этого, меняется и условие возможной причинной связи между событиями. Если луч света из точки A приходит в точку B до того, как там *произошло событие*, то событие A может повлиять на событие B. Именно в таком случае событие B считается причинно связанным с событием A. Запишем это условие так:

$$t_B - t_A \geq \frac{r_{AB}}{c}, \qquad (1)$$

где r_{AB} — расстояние между точками, где происходят события A и B. Условие

$$t_A - t_D \geq \frac{r_{AD}}{c} \qquad (2)$$

означает, что событие A может быть следствием события D, т. е. событие D является причинно связанным с событием A, хотя и в обратном порядке. Если же

$$|t_A - t_K| < \frac{r_{AK}}{c}, \qquad (3)$$

то события, даже не будучи одновременными, полностью независимы одно от другого, никакая информация об одном событии не может прийти к моменту наступления другого.

Все это условно изображено на рисунке. Если, например, событие B связано с событием A соотноше-

(Окончание см. на с. 50)

Математический кружок

Основной принцип дифференциального исчисления

Часть I: Линейная функция

Член-корреспондент АН СССР
Д. К. ФАДДЕЕВ,
кандидат физико-математических наук
М. С. НИКУЛИН,
И. Ф. СОКОЛОВСКИЙ

В этой статье авторам хотелось подтвердить мысль о том, что математика в своей элементарной части является самой простой из наук, так как она изучает наиболее грубые стороны действительности. Это в полной мере относится и к элементам математического анализа, основные идеи которого очень просты и наглядны, если их показывать на том интуитивном уровне, на котором они фактически возникли. К сожалению, очевидность многих результатов математического анализа, их ясный геометрический и физический смысл зачастую уже при первом знакомстве приносятся в жертву проблемам обоснования и так называемой математической строгости.

По существу, основной идеей «высшей математики» является следующее простое соображение, которое мы называем *основным принципом дифференциального исчисления:*

На небольшом участке любой достаточно «хорошей» кривой она успевает мало изогнуться и тем меньше, чем меньше рассматриваемый участок. Поэтому малый кусочек кривой линии почти совпадает с отрезком некоторой прямой, и их близость становится все более совершенной по мере стягивания участка кривой к некоторой точке. Прямая, которая плотнее, чем другая прямая, прижимается к кривой вблизи данной точки, называется касательной к кривой в данной точке. В частности, график достаточно «хорошей» функции на

малом участке почти прямолинеен, и малое изменение функции почти равно малому изменению некоторой линейной функции. Иными словами, «хорошая» функция почти линейна локально, т. е. в бесконечно уменьшающейся окрестности любого значения аргумента. Угловой коэффициент касательной к графику функции называется значением производной от функции в рассматриваемой точке.

«Основной принцип» не является теоремой и не содержит в себе четких определений. Достаточно «хорошая» кривая и «хорошая» функция — понятия, которые можно определить точнее лишь после уточнения и формализации понятия производной. Однако рациональные, степенные, показательные и логарифмические, а также тригонометрические функции — все являются «хорошими». Более того, функции, возникающие при исследовании процессов естествознания и техники, обычно оказываются «хорошими». В качестве «плохой» можно назвать функцию $|x|$ в окрестности нуля.

В этой статье мы, оставив в стороне проблемы обоснования, получим основные результаты школьного курса математического анализа, исходя из «основного принципа» дифференциального исчисления. Но прежде чем перейти к решению этой задачи, которой посвящена вторая часть этой статьи, мы обстоятельно рассмотрим линейную функцию. Это необходимо сделать по двум причинам. Первая состоит в том, что линейная функция в школьном курсе изучается очень рано и, как следствие этого, несколько упрощенно и оторванно от важнейших ее применений. Вторая причина — принципиальная, она связана с особой ролью, которую играет понятие линейной функции в основных концепциях математического анализа.

Определение линейной функции

Линейной функцией называется функция вида $y=kx+b$, где k и b — постоянные. При $k=0$ функция принимает постоянное значение $y=b$. При $b=0$ функция $y=kx$ называется *прямой пропорциональностью*, а параметр k называется *коэффициентом пропорциональности*.

Характеристическое свойство линейной функции

Это свойство состоит в следующем: *приращение линейной функции пропорционально приращению аргумента.*

Действительно, пусть $y=kx+b$ — данная функция и пусть аргумент изменился от x_1 до x_2. Выразим приращение функции $\Delta y=y(x_2)-y(x_1)$ через приращение аргумента $\Delta x=x_2-x_1$:

$$y(x_2)-y(x_1)=kx_2+b-(kx_1+b)=k(x_2-x_1).$$

Таким образом, $\Delta y=k\cdot\Delta x$, т. е. действительно приращение Δy функции $y=kx+b$ пропорционально приращению Δx аргумента с коэффициентом пропорциональности, равным k.

Справедливо обратное утверждение, а именно: *если приращение функции $f(x)$ пропорционально приращению аргумента, то $f(x)$ — линейная функция.*

Действительно, выберем (зафиксируем) некоторое значение x_0. Тогда для любого x в силу условия выполняется равенство

$$f(x)-f(x_0)=k(x-x_0),$$

откуда

$$f(x)=kx-kx_0+f(x_0),$$

т. е. функция имеет вид:

$$f(x)=kx+b, \text{ где } b=f(x_0)-kx_0,$$

значит, $f(x)$ — линейная функция.

Итак, мы приходим к выводу, что отмеченным свойством обладает линейная и только линейная функция, поэтому и называют его *характеристическим свойством линейной функции.*

Монотонность линейной функции

При $k>0$ функция $y=kx+b$ — возрастающая, при $k<0$ — убывающая.

Докажем это при $k>0$; пусть $x_2>x_1$, тогда $y(x_2)-y(x_1)=kx_2+b-(kx_1+b)=k(x_2-x_1)>0$, т. е. $y(x_2)>y(x_1)$, что и требовалось доказать.

Композиция линейных функций

Сложная функция, являющаяся композицией линейных функций, тоже *линейная функция с коэффициентом пропорциональности, равным произведению коэффициентов пропорциональности составляющих ее функций.*

Действительно, пусть

$F(x)=f(g(x))$ и $f(x)=k_1x+b_1$, $g(x)=k_2x+b_2$.

Тогда

$$F(x)=k_1(k_2x+b_2)+b_1=$$
$$=k_1k_2x+k_1b_2+b_1=kx+b,$$

где $k=k_1k_2$, $b=k_1b_2+b_1$.

Очевидно, что утверждение справедливо для сложной функции, составленной из любого числа линейных функций.

График линейной функции

Теорема. *График линейной функции $y=kx+b$ — прямая.*

Читатель без труда докажет эту теорему, пользуясь подобием прямоугольных треугольников. Однако нетрудно построить и доказательство, не используя теории подобия, опираясь на монотонность линейной функции.

Пусть $y=kx+b$, и мы рассматриваем точки на графике с абсциссами $0, x_1, 2x_1, 3x_1, \ldots$ Покажем, что эти точки лежат на одной прямой. Идея доказательства ясна из рисунка 1. Все розовые треугольники равны, и сумма углов при любой из точек рассматриваемого ряда равна 180°, так как сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°, и третий угол при каждой из точек прямой. Следовательно, гипотенузы треугольников продолжают друг друга и составляют прямую. По той же причине точки графика с абсциссами 0, x_1/n, $2x_1/n$, ..., nx_1/n, ... лежат на прямой, и она совпадает с предыдущей, ибо содержит точку с абсциссой $x_1=nx_1/n$. Натуральное число n можно взять сколь угодно большим, так что найденная прямая L содержит точки графика со сколь угодно густо расположенными абсциссами.

Покажем, что все точки графика лежат на той же прямой L. Допустим, что точка (x_0, y_0) графика лежит выше прямой L. (Если точка расположена ниже, рассуждение аналогично.) Тогда, как и прежде, мы убедимся в том, что на прямой L', соединяющей точку $(0, b)$ с точкой (x_0, y_0), точки графика с абсциссами 0, x_0/m, $2x_0/m$, ... расположены сколь угодно густо. Таким образом, в этом предположении точки графика функции $y=kx+b$ «прыгали» бы сколь угодно часто с прямой L на прямую L', что невозможно в силу монотонности линейной функции. Итак, любая точка графика лежит на построенной ранее прямой.

Обратно, любая точка (x_2, y_2) этой прямой принадлежит графику $y=kx+b$. Действительно, точка (x_2, kx_2+b) есть точка графика и, в силу доказанного, принадлежит прямой, а так как на прямой, не параллельной оси ординат, есть только одна точка с абсциссой x_2, то $y_2=kx_2+b$.

Из доказанной выше теоремы следует, что *график прямой пропорциональности ($b=0$) — прямая, проходящая через начало координат.*

При решении задач часто приходится прибегать к утверждению, обратному теореме о графике линейной функции: *любая прямая, непараллельная оси ординат, есть график некоторой линейной функции.*

Докажем его.

Пусть данная прямая проходит через точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1), где $x_0 \neq x_1$ (рис. 2). Всегда можно подобрать уравнение вида $y=kx+b$, для которого пары чисел (x_0, y_0) и (x_1, y_1) будут решением:

$$\begin{cases} y_0=kx_0+b, \\ y_1=kx_1+b. \end{cases}$$

Для этого достаточно положить

$$k=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}, \quad b=y_0-\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}x_0.$$

Прямая — график линейной функции

$$y=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}x+y_0-\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}x_0-$$

проходит через две точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1); это — единственная прямая, проходящая через эти две точки, значит, она совпадает с данной прямой, что и доказывает наше утверждение.

Применение характеристического свойства линейной функции

Пример 1. *Написать уравнение прямой а) с угловым коэффициентом $k=3$, проходящей через точку $(-7, 2)$, б) проходящей через точки $(-8, -10)$ и $(2, 4)$.*

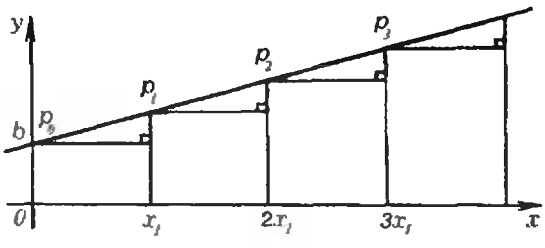


Рис. 1.

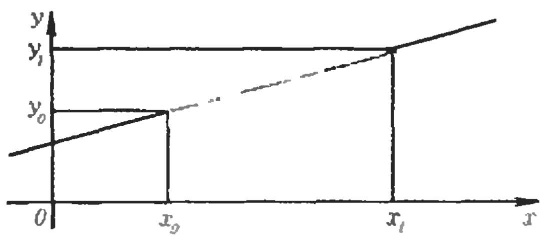


Рис. 2.

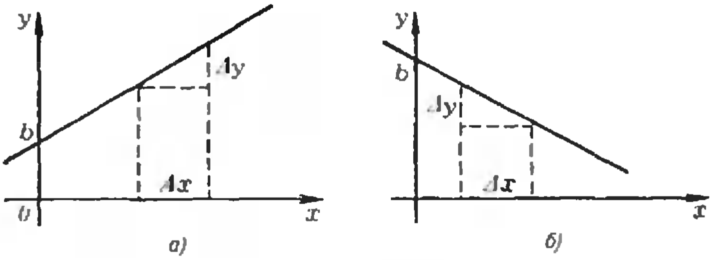


Рис. 3.

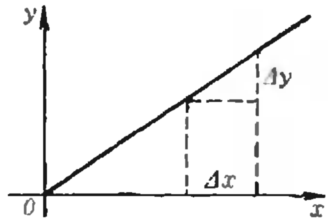


Рис. 4.

Решение. а) Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка искомой прямой; тогда $\Delta y = y - 2$ и соответствующее приращение аргумента равно $\Delta x = x + 7$. Уравнение прямой имеет вид:

$$y - 2 = 3(x + 7).$$

б) Вычислим угловой коэффициент

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4+10}{2+8} = 1{,}4.$$

Мы пришли к предыдущей задаче, но имеем одну «лишнюю» точку. Выбираем любую из двух и составляем уравнение прямой, например, $y-4=1{,}4(x-2)$; можно было написать и $y+10=1{,}4\,(x+8)$.

Пример 2. *Изучается зависимость, описываемая линейной функцией $y=kx+b$; значения величины x получаются в результате измерений. С какой точностью необходимо выполнять измерения величины x, чтобы вычислять значения величины y с точностью до ε?*

Решение. Ошибку в измерении величины x можно считать приращением аргумента x, т. е. принять за Δx. Тогда в силу характеристического свойства линейной функции ошибка в определении величины y будет равна $\Delta y = k \cdot \Delta x$. Требуется $|\Delta y| \leqslant \varepsilon$, откуда $|\Delta x| \leqslant \varepsilon/|k|$.

Это элементарный результат, но он находит применение в весьма общих и совсем не элементарных ситуациях.

Геометрический и физический смысл параметров k и b в уравнении прямой $y=kx+b$

Геометрический смысл параметра k состоит в том, что *k равен тангенсу угла наклона прямой к оси абсцисс* (с учетом направления отсчета угла). Модуль k говорит о том, насколько круто (близко к вертикали) проходит прямая, поэтому k называют *угловым коэффициентом* прямой. Знак k показывает, в каком направлении идет прямая (возрастает или убывает линейная функция).

Остановимся более подробно на физическом смысле параметров k и b. Возьмем графики двух линейных функций (рис. 3 *а*, *б*) и будем присваивать переменным (по осям координат) различные наименования так, чтобы каждый раз данная прямая описывала бы некий возможный процесс.

1) Пусть графики изображают процесс изменения температуры некоторого физического тела. По оси ординат откладывается температура ($y=T$) в градусах Цельсия, по оси абсцисс время ($x=t$) в секундах. Тогда

$$k = \frac{\Delta T}{\Delta t}\ \frac{\text{град}}{\text{с}}$$

— скорость изменения температуры. В случае а) $|k|$ — скорость нагрева, в случае б) $|k|$ — скорость охлаждения, $b=T\,(0)$ — начальная температура.

2) Пусть $y=m$ — масса горючего в граммах, $x=t$ — время в секундах. Тогда

$$k = \frac{\Delta m}{\Delta t}\ \frac{\text{г}}{\text{с}},$$

$|k|$ — скорость расхода горючего, в случае а) $b=m\,(0)$ — израсходованное горючее до начала движения, в случае б) $b=m(0)$ — запас горючего на момент начала движения.

3) Пусть $y=A$ — работа в джоулях, $x=t$ — время в секундах. Тогда

$$k = \frac{\Delta A}{\Delta t}\ \frac{\text{Дж}}{\text{с}}$$

— «скорость изменения работы» — мощность, $b=A\,(0)$ — работа, совершенная к началу отсчета.

4) «Классический» пример. Для случая а) $y=s$ — путь, пройденный точкой в метрах, $x=t$ — время в секундах. Тогда $k=\frac{\Delta s}{\Delta t}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ — скорость изменения пути, т. е. скорость движения, $b=s(0)$ — путь к началу отсчета времени.

Для случая б) y — координата точки, движущейся по прямой, $x=t$ — время в секундах, $k=\frac{\Delta y}{\Delta t}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ — скорость изменения координаты, $b=y(0)$ — начальное положение точки на прямой.

Рассмотрим и частный случай линейной функции — прямую пропорциональность: $y=kx$ (рис. 4).

5) Пусть график изображает зависимость массы металлического стержня от его длины: $y=m$ — масса в граммах, $x=l$ — длина в сантиметрах. Тогда $k=\frac{\Delta m}{\Delta l}\ \frac{\text{г}}{\text{см}}>0$ — линейная плотность стержня.

6) Пусть график изображает зависимость массы m некоторого вещества от объема V. Тогда $k=\frac{\Delta m}{\Delta V}\frac{\text{г}}{\text{см}^3}>0$ — объемная плотность данного вещества.

Средняя скорость и линейная функция

Вернемся к «чистой» математике. Математик изучает функции, отвлекаясь от конкретного физического содержания. Он по оси ординат откладывает отвлеченные числа (значения функции), по оси абсцисс — тоже отвлеченные числа (значения аргумента).

Желая сделать математические понятия наглядными, выразительными и подчеркивая связь с реальной действительностью, математики называют $k=\Delta y/\Delta x$ — *скоростью изменения* линейной функции, а b — *начальной ординатой.*

Используя физическую терминологию, характеристическое свойство линейной функции можно сформулировать так: *линейная функция характеризуется постоянством скорости изменения.*

Заметим, что в отношении линейной функции не возникает проблем с употреблением понятий «средняя скорость» и «мгновенная скорость» изменения функции. Вполне естественно считать, что поскольку «средняя скорость» изменения линейной функции на любом промежутке одна и та же, то и «мгновенная скорость» изменения линейной функции в каждой точке тоже постоянна и равна «средней скорости». Иначе обстоит дело в общей ситуации, когда приходится говорить о «мгновенной скорости» изменения не линейной функции.

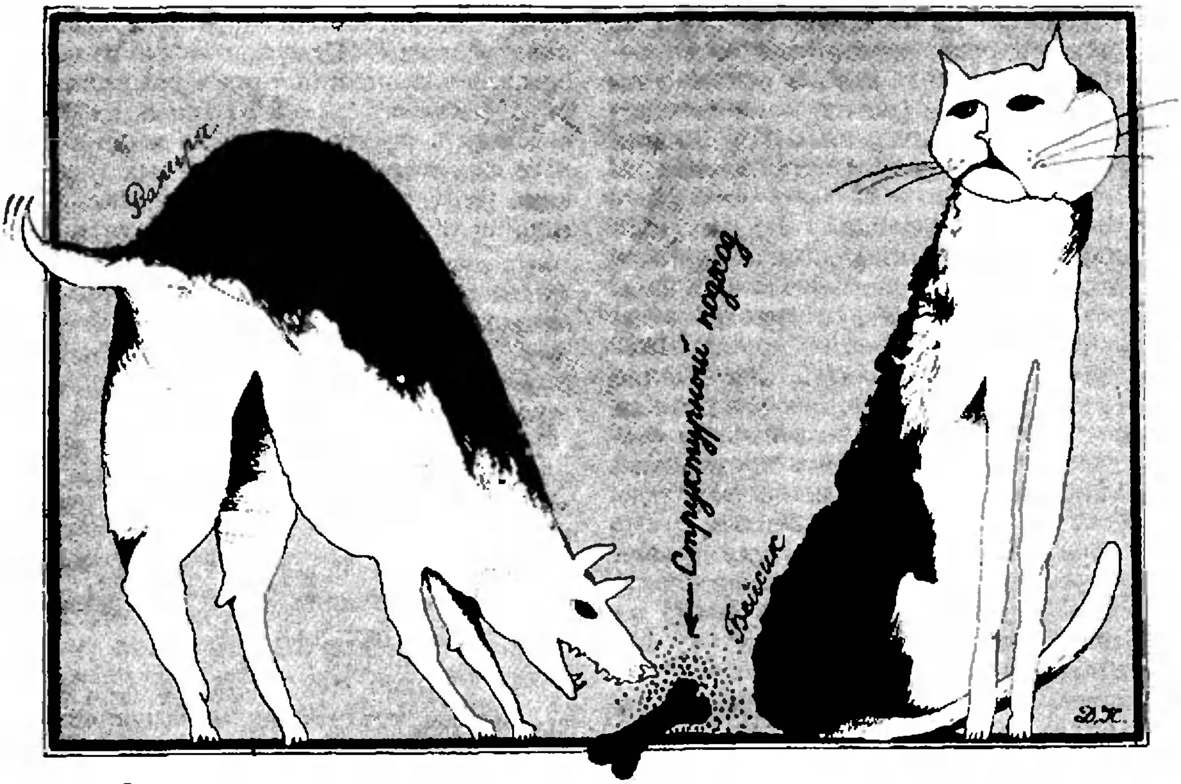
О машине времени и теории относительности

(Начало см. на с. 44)

нием (1), то такое же соотношение связывает эти два события в любой системе отсчета — ведь условие причинной связи не может измениться. Поэтому область событий B называют «абсолютным будущим» по отношению к событию A. Точно так же событие D, которое может повлиять на событие A, для любого наблюдателя происходит раньше, чем A. А вот событие K, не связанное с A причинной зависимостью, при надлежащем выборе системы отсчета может быть сделано одновременным с A (попробуйте убедиться в этом самостоятельно) или даже поменяться с ним порядком следования, и это не приведет ни к каким парадоксам.

Итак, мы убедились, что при внимательном анализе выбранное нами положение СТО — относительность одновременности — оказалось не противоречащим здравому смыслу. Правда, пришлось немножко подправить сам здравый смысл.

А. И. Черноуцан



Искусство программирования

Структурный подход и язык программирования Бейсик

В. В. РОЖДЕСТВЕНСКИЙ, С. Г. ХЛЕБУТИН

В последние годы как среди профессиональных программистов, так и среди преподавателей информатики, наиболее популярным стал так называемый *структурный подход* к программированию. Суть этого подхода состоит в том, чтобы писать команды в порядке их исполнения (однако при этом команды могут быть и *составными* — например команда *ветвления* или *цикла*,— и тогда содержащиеся внутри них более «мелкие» команды могут при исполнении пропускаться или повторяться). Структурный подход исключает так называемую *передачу управления по меткам* — один из традиционных приемов программирования на таких «классических» языках, как *Фортран* или *Кобол*.

Преимущество структурированных программ состоит в том, что они легче читаются и анализируются, и поэтому для них понимание сути работы алгоритма и проверка его правильности становятся возможными, а вероятность допустить ошибку (например, *зацикливание*) уменьшается. Поэтому сейчас структурирование программ все больше считается хорошим стилем грамотного и систематического программирования.

Это отразилось и на школьном курсе информатики: как школьный алгоритмический язык, так и первый из изучаемых языков программирования (*Рапира*), по своей сути основаны на структурном подходе. Этого, однако, нельзя сказать о втором языке, изучаемом в школьном учебнике информатики — языке программирования *Бейсик*. Беглый взгляд на любую программу, написанную на Бейсике, позволяет сразу убедиться в ее неструктурности: каждая строчка начинается с номера (метки) и часто встречаются команды типа GOTO 90 или GOSUB 210 (передача управления по метке).

Можно ли связать структурный подход, реализованный в школьном алгоритмическом языке, с написанием программ на неструктурном языке Бейсик? Оказывается — можно. Цель этой статьи — показать, как именно это делается. Более точно, мы укажем простую методику, позволяющую «автоматически» переводить программы, написанные на школьном алгоритмическом языке, на язык Бейсик.

При этом мы не будем стремиться к тому, чтобы написать наилучшую (скажем, кратчайшую) программу на Бейсике, отвечающую алгоритму, записанному на школьном алгоритмическом языке. Напротив, мы будем вводить ряд дополнительных строчек (начинающихся со слова REM), не нужных для исполнителя (ЭВМ), но обеспечивающих структурность полученной программы, ее читаемость.

Мы предполагаем, что читатель знаком — хотя бы в общих чертах — со школьным алгоритмическим языком и языком Бейсик. Мы считаем, что нам дана готовая программа на алгоритмическом языке; наша цель — перевести ее на Бейсик. В данной программе могут встретиться следующие основные конструкции школьного алгоритмического языка: 1) типы переменных и констант; 2) таблицы; 3) оператор присваивания; 4) оператор ветвления; 5) оператор цикла; 6) операторы ввода и выводы; 7) заголовок алгоритма; 8) способы вызова подпрограмм, передача параметров.

Укажем по порядку, как переводится каждая из этих конструкций.

1) Типы переменных и констант в школьном алгоритмическом языке следующие: *натуральные*, *целые*, *вещественные* и *литерные*. В Бейсике тип переменной не описывается, а обозначается символом после имени переменной: % — целая, ¤ — литерная, нет символа — вещественная. Натуральных переменных в Бейсике нет, вместо них будем использовать целые. При переводе будем оставлять описания типа в комментариях (начинающихся со слова REM), а всюду в программе после имен целых и литерных переменных ставить % и ¤ соответственно. Например, если в программе встретилось

нат i, цел k, вещ a, лит t

то мы пишем (номер строки мы обозначаем буквой n)

n REM НАТ I, ЦЕЛ K, ВЕЩ A, ЛИТ T

а в программе используем переменные I %, N %, A, T¤.

2) Таблицы также бывают трех типов. Минимальное значение индексов в Бейсике равно 0. Если в программе встретилось

вещ таб x [0:10], цел таб k [0:3, 0:5]

мы пишем (номера строк опущены)

```
REM ВЕЩ ТАБ X [0:10]
ЦЕЛ ТАБ K [0:3, 0:5]
DIM X (10), K % (3,5)
```

Заметим, что строчка, начинающаяся со слова REM, не повлияет на исполнение алгоритма (хотя она вводится в ЭВМ и появляется в распечатке программы). Мы ее пишем с тем, чтобы иметь более подробное и наглядное описание переменных, чем то, которое дается следующей строчкой перевода.

3) Оператор присваивания (значок :=) алгоритмического языка переводится на Бейсик знаком равенства (=). Например, строчка $x := x+1$ переводится как X=X+1.

4) Оператор ветвления предлагается переводить так:

```
если усл              IF (NOT усл) THEN n1
  то                                 серия 1
    серия 1           GOTO n2
  иначе            n1 REM ИНАЧЕ
    серия 2                          серия 2
все                n2 REM ВСЕ
```

или в сокращенной форме (без иначе)

```
если усл              IF (NOT усл) THEN n
  то серия                           серия
все                 n REM ВСЕ
```

Здесь усл — условие, n_1, n_2, n — номера строк.

5) Оператор цикла (цикл пока) предлагается переводить по следующей схеме:

```
пока усл           n1 IF (NOT усл) THEN n2
  нц                                 серия
    серия             GOTO n1
  кц               n2 REM КОНЕЦ ЦИКЛА
```

В цикле для при переводе можно использовать оператор FOR:

для *i* от *min* до *max*	
шаг *h*	FOR I=*min* TO *max* STEP *H*
нц	серия
серия	NEXT I
кц	REM КОНЕЦ ЦИКЛА

(шаг *h* может быть опущено, при этом шаг полагается равным 1).

6) **Операторы ввода и вывода**, строго говоря, отсутствуют в алгоритмическом языке. Если, однако, они добавлены к языку (например, как в «Кванте», 1986, № 11, с. 40 или как в «Е — практикуме»*)), то они переводятся словами INPUT и PRINT соответственно. В противном случае следует в конце программы на Бейсике написать PRINT X, где X — имя переменной (или список имен переменных), стоящей после слова рез в заголовке программы.

7) **Заголовок алгоритма** (процедуры, функции или основной программы) пишется в комментариях, т. е. переписывается после слова REM. Слово кон заменяется на RETURN (или на END в основной программе), слово нач игнорируется.

Для организации подпрограмм в Бейсике имеются операторы GOSUB и RETURN. Например, для вызова подпрограммы КВУР (a, b, c, x_1, x_2) (начинающейся со строки 170 и вычисляющей корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$), чтобы решить уравнение $x^2+(P+2)x+4Q$, нужно написать:

```
REM КВУР (1, P+2, Q*4, X, У)
A=1
B=P+2
C=Q*4
GOSUB 170
X=X1
У=X2
REM КОНЕЦ ВЫЗОВА КВУР
```

Если какая-нибудь процедура всегда вызывается с одними и теми же аргументами, имеет смысл написать ее так, чтобы они и были ее формальными параметрами, при этом вызов будет состоять только из GOSUB *n*. Если нет, подобная оптимизация опасна: получится, что некоторые переменные вызывающей процедуры могут быть испорчены при вызове.

В качестве примера мы приводим программу приближенного решения уравнения F(X)=0 с данной точностью E методом деления данного отрезка [A, B] пополам. Для конкретности выбрано очень простое уравнение ($X^2=4$); однако, заменив должным образом лишь одну команду (с номером 1020), можно пользоваться этой программой для решения любого другого уравнения. Читателю мы предлагаем прочитать программу и разобрать работу алгоритма. Мы уверены, что структурированность программы и знание школьного алгоритмического языка позволит ему с легкостью выполнить это задание.

```
10 REM АЛГ ТЕСТ
20 REM НАЧ ВЕЩ A,B,E,C
30   PRINT "ЛЕВЫЙ КОНЕЦ="
40   INPUT A
50   PRINT "ПРАВЫЙ КОНЕЦ="
60   INPUT B
70   PRINT "ТОЧНОСТЬ="
80   INPUT E
90 REM ДИХ(A,B,E,C)
100   GOSUB 200
110 REM КОНЕЦ ВЫЗОВА ДИХ
120   PRINT "ОТВЕТ=",C
130 REM КОН
140 END
200 REM АЛГ ДИХ(A,B,E,C)
210 REM   АРГ A,B,E,C
220 REM   РЕЗ C
230 REM НАЧ ВЕЩ U,V
240 REM   U=F(A)
250   X=A
260   GOSUB 1000
270   U=Z
280 REM КОНЕЦ ВЫЗОВА F
290 IF(NOT B-A>=E) THEN 460
300 REM  НЦ
310   C=(A+B)/2
320 REM    V=F(C)
330       X=C
340       GOSUB 1000
350       V=Z
360 REM КОНЕЦ ВЫЗОВА F
370   IF(NOT U*V>=0) THEN 400
380 REM  ТО
390        A=C
400 REM  ВСЕ
410   IF(NOT U*V<=0) THEN 440
420 REM  ТО
430        B=C
440 REM  ВСЕ
450   GOTO 290
460 REM  КЦ
470 REM КОН
480 RETURN
1000 REM АЛГ ВЕЩ F(ВЕЩ X)
1010 REM НАЧ
1020     Z=X*X-1024
1030 REM КОН
1040 RETURN
```

*) Тренажер для освоения алгоритмического языка на машине «Ямаха».

Варианты вступительных экзаменов

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический и экономический факультеты)

1. Решите уравнение

$$\arcsin\frac{3-5\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-6\cos 2x}{5}=x-\frac{\pi}{3}.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{\left|\log_2\frac{4}{x}\right|-3}>\frac{1}{\left|\log_2\frac{x}{2}\right|-1}.$$

3. Из точки A к окружности радиусом R проводится касательная AM (M — точка касания). Секущая, проходящая через точку A, пересекает окружность в точках K и L, причем L — середина отрезка AK, угол AMK равен $60°$. Найдите площадь треугольника AMK.

4. При каких значениях параметра a множество решений системы неравенств

$$\begin{aligned}&x^2+(a+4)x+4a\leqslant y,\\&3x+y-(2a+4)\leqslant 0\end{aligned}$$

содержит отрезок $[-2; -1]$ оси Ox?

5. Точка M — середина ребра AD единичного куба $ABCDA'B'C'D'$. Через середину отрезка $B'M$ перпендикулярно ему проводится плоскость. Найдите расстояние от центра куба до этой плоскости.

Вариант 2

(физический факультет)

1. Найдите все решения уравнения $\sin x+\cos 3x=0$, удовлетворяющие неравенству

$$\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}>0.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_2(x^2-x+1)}+1\geqslant\frac{\log_2(x+3)}{\log_2(x^2-x+1)}.$$

3. Две окружности радиусами 3 и 4, расстояние между центрами которых равно 5, пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D так, что $CD=8$ и B лежит между C и D. Найдите площадь треугольника ACD.

4. Прямая касается параболы $y=-x^2+2x+2$ в точке A и пересекает ось Ox в точке B, а ось Oy в точке C. Известно, что точка A лежит в 1-й четверти координатной плоскости и $2AB=AC$. Найдите уравнение касательной.

5. В треугольной пирамиде $SABC$ ребра AB, BC и BS имеют длину 2 и взаимно перпендикулярны. Через середины ребер AC и SB проводится плоскость, пересекающая ребро AB и образующая равные углы с плоскостями граней ABS и ABC. Найдите величины этих углов.

Вариант 3

(факультет естественных наук и геолого-геофизический факультет)

1. Решите уравнение

$$(13x^2+2x-14)\cdot\arccos x=0.$$

2. Решите уравнение

$$2^{2\sin 2x-2\cos 2x+3}-\left(\frac{1}{6}\right)^{\cos 2x-\sin 2x-\log_6 14}+3^{2\sin 2x-2\cos 2x+1}=0.$$

3. При каком значении высоты прямоугольная трапеция с острым углом $30°$ и периметром 6 имеет наибольшую площадь?

4. Имеются три куска сплава меди с никелем в отношениях 2:1, 3:1 и 5:1 по массе. Из них сплавлен кусок массой 12 кг с отношением меди к никелю 4:1. Найдите массу каждого исходного куска, если масса первого была вдвое больше массы второго.

5. Дана пирамида $ABCD$. Ребро DC перпендикулярно плоскости основания ABC, $AB=3\sqrt{3}$, $BC=3$, угол ACB равен $\pi/3$, $DC=\sqrt{13}$. Проведена сфера радиусом 5 с центром в вершине D. Найдите длину линии пересечения сферы с основанием ABC.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из пяти задач трех типов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь важно понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

На решение задач давалось пять часов, начиная с завершения демонстрации.

После текста каждой задачи в скобках указан средний процент решивших ее.

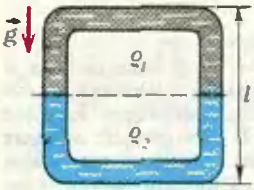


Рис. 1.

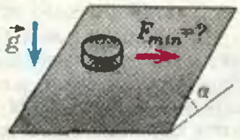


Рис. 2.

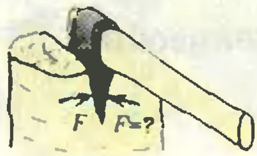


Рис. 3.

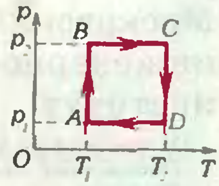


Рис. 4.

Вариант 1

1. Посередине закрытой с торцов трубы длиной $2L$ и сечением S находится поршень. Слева и справа от поршня заключены разные газы при одинаковом давлении p. На сколько сместится поршень, если он станет проницаемым для одного из газов? Сила трения поршня о трубу равна F. Температуру газов считать постоянной. (51 %)

2. Узкая трубка постоянного сечения образует квадрат со стороной l, закрепленный в вертикальной плоскости (рис. 1). Трубка заполнена равными объемами двух не проникающих друг в друга жидкостей с плотностями ϱ_1 и ϱ_2. Вначале более плотная жидкость заполняла верхнюю часть трубки. В некоторый момент жидкости пришли в движение. Найдите их максимальную скорость. Трения нет. Ускорение свободного падения равно g. (55 %).

3. Проволочное кольцо радиусом R имеет проводящую перемычку, расположенную вдоль диаметра. В левую и правую полуокружности включены конденсаторы емкостями C_1 и C_2. Кольцо помещено в нарастающее линейно со временем магнитное поле с индукцией $B(t)=B_0t/T$, перпендикулярное его плоскости. В некоторый момент времени перемычку убирают и затем прекращают изменять поле. Найдите заряды, установившиеся на конденсаторах. (29 %)

4. Оцените, с какой скоростью может бежать по Луне космонавт в легком удобном скафандре. (37 %)

5. Две одинаковые бутылки заполнены водой. В одну из них вставляют трубочку, отверстие которой закрыто пальцем. Бутылки одновременно переворачивают и в тот же момент открывают отверстие трубочки. Из бутылки с трубочкой вода вытекает заметно быстрее. Объясните явление. (91 %)

Вариант 2

1. На плоскости, образующей угол α с горизонтом, лежит шайба массой m (рис. 2). Какую минимальную силу надо приложить к шайбе в горизонтальном направлении вдоль плоскости, чтобы она сдвинулась? Коэффициент трения равен μ. (49 %)

2. Два плоских конденсатора емкостью C каждый соединены параллельно и заряжены до напряжения U. Пластины одного из конденсаторов могут двигаться свободно навстречу друг другу. Найдите их скорость в тот момент, когда зазор между пластинами конденсатора уменьшится вдвое. Масса каждой пластины равна M. Силу тяжести не учитывать. (55 %)

3. В цилиндрической трубе на расстояниях L и $2L$ от закрытого торца справа от него находятся два поршня, которые могут перемещаться без трения. В левом отсеке находятся пары воды при давлении p_0, а в правом — воздух при том же давлении. Давление насыщенных паров воды равно $2p_0$. Правый поршень медленно вдвинули на расстояние a. На сколько сдвинется левый поршень? Температуру паров воды и воздуха считать постоянной. (39 %)

4. Лесоруб ударил топором по чурбаку. Топор застрял, войдя в чурбак наполовину (рис. 3). Оцените силу, с которой сжимается лезвие топора. (36 %)

5. Лазерный луч падает на прозрачную плоскопараллельную пластину, одна поверхность которой закрашена, так что способна рассеивать свет во всех направлениях. На пластине видна следующая картина: светлая точка в центре, темный круг с резко очерченной границей и светлый ореол за кругом. Объясните явление. (27 %)

Вариант 3

1. Диаграмма циклического процесса для одного моля газа в координатах p, T образует прямоугольник $ABCD$ (рис. 4), стороны BC и AD которого соответствуют давлениям p_2 и p_1, а AB и CD — температурам T_1 и T_2. Найдите максимальный и минимальный объемы газа. Газовая постоянная равна R. (83 %)

2. Два проводящих шара радиусами r и R расположены далеко друг от друга и соединены с обкладками конденсатора емкостью C. Шару радиусом r сообщили заряд Q. Какой заряд оказался на другом шаре? Емкостью проводов пренебречь. (33 %)

3. По тонкой проволочной винтовой спирали, стоящей вертикально, скользит нанизанная на проволоку бусинка. Радиус спирали равен R, угол наклона проволоки к горизонту равен α. Найдите установившуюся скорость бусинки, если коэффициент трения ее о проволоку равен μ. Ускорение свободного падения равно g. (36 %)

4. Человек нечаянно наступил на лежащие вверх зубьями грабли. Оцените, с какой скоростью грабли ударят его по лбу. (39 %)

5. В металлический сосуд с подкрашенной жидкостью введена тонкая трубка так, что столб жидкости виден в выступающей части трубки. Если поставить сосуд на разогретую плитку, то столбик жидкости в трубке сначала опустится, а потом пойдет вверх. Объясните явление. (59 %)

Публикацию подготовили *М. Л. Вишневский, В. М. Копытов, Г. В. Меледин*

Московский инженерно-физический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\log_3(2\sin x-1+18\sin^2 x)=-\log_{\frac{1}{3}}(1-7\sin x).$$

2. Двое рабочих, работая одновременно, выполняют некоторую работу за 15 минут. Сколько времени потребуется второму рабочему, чтобы выполнить эту работу одному, если известно, что первый рабочий выполнит ее на m часов быстрее, чем второй?

3. Решите неравенство

$$(c+1)<(c+2)\cdot 3^{\sqrt{x-1}}.$$

4. Правильная четырехугольная пирамида $SPQRT$ пересечена плоскостью, равноудаленной от точек S, P, Q, R, T. Определите площадь сечения этой плоскостью шара, вписанного в пирамиду $SPQRT$, если высота пирамиды SO имеет длину h, а величина угла SPQ равна α.

Вариант 2

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2-7{,}5x+14}\,\log_2|x-3|\leqslant 0.$$

2. В двух сосудах емкостью по 5 л каждый содержится раствор щелочи. Первый сосуд содержит 3 л p-процентного (по объему) раствора щелочи, второй — 4 л $2p$-процентного раствора такой же щелочи. Сколько литров из второго сосуда надо перелить в первый, чтобы получить в нем 10-процентный раствор щелочи?

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}(a^2-a)\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)+2\cos y=a+5,\\[2mm] 3\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)+\cos y=4,\end{cases}\qquad a\in\mathbb{R}.$$

4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ величина угла BSD, образованного двумя противоположными боковыми ребрами SB и SD, равна 2α. Через точку A параллельно прямой BD проведена плоскость π, пересекающая общую линию плоскостей ASC и BSD в точке P, удаленной от прямой SB на расстояние $d>0$. Определите радиус сферы, описанной около пирамиды $SABCD$, если плоскость π образует с плоскостью основания $ABCD$ угол величины α.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Шарик массой $m=50$ г прикреплен к двум одинаковым невесомым пружинам и нити (рис. 1), угол $\alpha=60^\circ$, жесткость каждой пружины $k=10$ Н/м. В некоторый момент нить обрывается, и шарик начинает движение с ускорением $a=2$ м/с^2. Найдите максимальную скорость, которую приобретает шарик при своем движении, если расстояние между точками закрепления пружин не превышает удвоенной длины недеформированной пружины. Силой тяжести пренебречь.

2. Шайба лежит в конической чаще на расстоянии $r=20$ см от вертикальной оси конуса (рис. 2). Угол между образующей и осью конуса $\alpha=60^\circ$, коэффициент трения между шайбой и чашей $\mu=0{,}8$. С какой угловой скоростью следует вращать чашу вокруг ее оси, чтобы шайба вылетела из чаши?

3. Альфа-частица с кинетической энергией W налетает на первоначально покоившееся ядро атома гелия. При какой энергии частицы сблизятся на расстояние $r=1\cdot10^{-13}$ м? Иметь в виду, что в момент максимального сближения скорости обеих частиц одинаковы.

4. В цилиндре с площадью основания $S=100$ см^2 находится газ при температуре $t=27$ °С. На высоте $h=30$ см от основания цилиндра расположен поршень массой $m=60$ кг. Какую работу совершит газ при расширении, если его температуру медленно повысить на $\Delta t=50$ °С? Атмосферное давление $p_0=1{,}0\cdot10^5$ Па.

5. По двум параллельным проводникам, находящимся друг от друга на расстоянии $l=0{,}5$ м, перемещают с постоянной скоростью $v=10$ м/с проводник-перемычку (рис. 3). Между левыми концами проводников включены последовательно два конденсатора, причем емкость C_2 больше емкости C_1 в $n=1{,}5$ раза. Вся система находится в однородном магнитном поле, направленном перпендикулярно к плоскости, в которой лежат проводники. Найдите индукцию магнитного поля, если на конденсаторе емкостью C_2 напряжение $U_2=0{,}5$ В. Сопротивление проводников пренебрежимо мало.

6. Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов $U=200$ В, влетела в точке *1* (рис. 4) в область поперечного однородного магнитного поля с индукцией $B=4\cdot10^{-3}$ Тл. Расстояние между точками *1* и *2* равно $l=1$ м. Найдите отношение заряда частицы к ее массе.

7. Протон, отношение заряда к массе которого $e/m=1\cdot10^8$ Кл/кг, движется без начальной скорости из точки O (рис. 5) в области

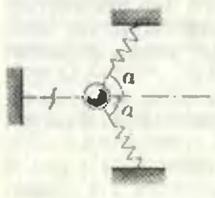


Рис. 1.

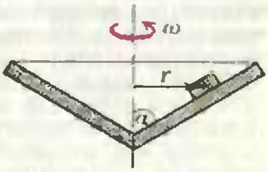


Рис. 2

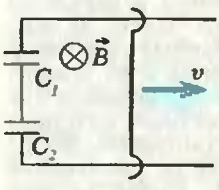


Рис. 3.

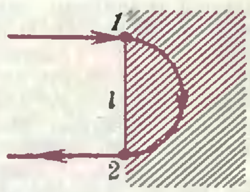


Рис. 4.

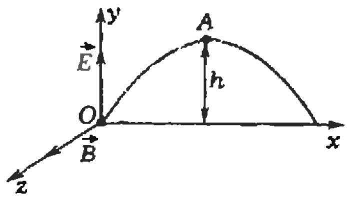


Рис. 5.

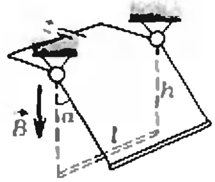


Рис. 6.

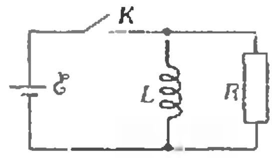


Рис. 7.

пространства, где созданы однородные взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля с $E = 10$ кВ/м и $B = 0{,}02$ Тл. Найдите ускорение протона в вершине траектории — точке A, если $h = 0{,}5$ м.

8. Перекладина длиной $l = 20$ см и массой $m = 24$ г подвешена горизонтально на двух тонких невесомых проводах в вертикальном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}08$ Тл (рис. 6). К точкам закрепления проводов подключен источник тока, при этом в цепи поддерживается постоянный ток $I = 2{,}5$ А. Длина проводов $h = 0{,}12$ м. Провода отклоняют на угол $\alpha = 30^\circ$ от вертикального положения и отпускают. Найдите скорость перекладины в момент, когда провода проходят через вертикальное положение. Индуктивностью пренебречь.

9. Можно ли, имея конденсаторы емкостями $C_1 = 120$ пФ и $C_2 = 156$ пФ и катушку индуктивностью $L = 125$ мкГн, получить колебательный контур, настроенный на длину волны $\lambda = 350$ м?

10. К источнику тока подключены катушка индуктивностью $L = 0{,}80$ Гн и резистор сопротивлением $R = 25$ Ом (рис. 7). Сразу после размыкания ключа K в резисторе выделяется тепловая мощность $P = 100$ Вт. Сопротивление обмотки катушки пренебрежимо мало. Какое количество теплоты выделится в резисторе к моменту прекращения тока в цепи?

Публикацию подготовили *А. П. Горячев, Д. Ф. Калиниченко, Н. А. Кудряшов, В. В. Светозаров, М. Н. Стриханов*

Московский институт стали и сплавов

Математика
Вариант письменного экзамена

1. Вычислите

$$\left(\frac{12}{\sqrt{15}-3}-\frac{28}{\sqrt{15}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)(6-\sqrt{3}).$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2}=3{,}4 \quad \text{при} \quad 2<x.$$

3. Найдите величину $(x+y)^2$, если

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{y}=1, \\ y-x=1. \end{cases}$$

4. Слиток меди с оловом массой 12 кг содержит 45 % меди. Сколько килограмм чистого олова надо прибавить к этому слитку, чтобы получившийся новый сплав содержал 40 % меди?

5. Решите уравнение

$$\lg(0{,}5+x)=\lg 0{,}5-\lg x.$$

6. Решите неравенство

$$15\cdot 25^{x-1}-2\cdot 5^{x+1}>5^3.$$

В ответе запишите наименьшее целое решение этого неравенства.

7. Найдите наименьшее целое значение параметра t, при котором неравенство

$$(t^2-1)x^2+2(t-1)x+1>0$$

имеет место при всех значениях x.

8. К параболе $y=2x^2-3x-14$ проведена касательная, которая образует с положительным направлением оси OX угол $\frac{3\pi}{4}$. Найдите ординату точки касания.

9. Вычислите без таблиц

$$\frac{\sin^2(-120^\circ)\cos 420^\circ+\operatorname{tg}(-225^\circ)}{\sin 315^\circ\cos 315^\circ}.$$

10. Решите уравнение

$$2\sin^2 x=3\cos x.$$

В ответе запишите количество корней уравнения, принадлежащих отрезку $\left[-2\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

11. В прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 26, вписана окружность радиусом 4. Найдите периметр треугольника.

12. В основании четырехугольной пирамиды лежит параллелограмм, острый угол которого равен 30°, а высота равна $2\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды, если все двугранные углы при основании равны 60°.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Центрифуга, вращаясь, делает $n = 30$ об/мин. Определите линейную скорость точки, лежащей на расстоянии $l = 6$ м от центра вращения. Ответ дайте в СИ.

2. К находящемуся на горизонтальной плоскости бруску массой $m = 10$ кг приложена горизонтальная сила $F = 5$ Н. Определите силу трения между бруском и плоскостью, если коэффициент трения $\mu = 0{,}1$. Ускорение свободного падения считать равным $g = 9{,}8$ м/с^2. Ответ дайте в СИ.

3. Пуля летит с некоторой начальной скоростью. Она пробивает доску толщиной $d = 3{,}6$ см и продолжает полет со скоростью, составляющей 0,8 начальной. Какой максимальной толщины доску она может пробить?

Сила сопротивления доски постоянна. Ответ дайте в СИ.

4. Тело массой $m = 12$ кг изготовлено из вещества с плотностью $\rho = 1000$ кг/м³. Найдите объем тела. Ответ дайте в СИ.

5. В баллоне емкостью $V = 10^{-2}$ м³ находится газ при температуре $t = 27$ °C. Вследствие утечки давление снизилось на $\Delta p = 10^3$ Па. Какое количество молекул вышло из баллона, если температура не изменилась? Постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К. Ответ дайте, умножив результат на 10^{-20}.

6. Кусок свинца ударяется о препятствие со скоростью $v = 350$ м/с. Какая часть свинца расплавится, если все количество теплоты, выделяемое при ударе, поглощается свинцом? Температура свинца перед ударом $t = 27$ °C, температура плавления свинца $t_{пл} = 327$ °C, удельная теплоемкость свинца $c = 126$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления свинца $\lambda = 26{,}4 \cdot 10^3$ Дж/кг.

7. Сила, действующая на заряд $q = 1$ Кл, помещенный в электростатическое поле, равна $F = 1$ Н. Найдите напряженность поля. Ответ дайте в СИ.

8. Найдите сопротивление нихромового стержня диаметром $d = 1$ см и массой $m = 779$ г. Плотность нихрома $D = 7{,}9$ г/см³, удельное сопротивление $\rho = 10^{-6}$ Ом · м. Ответ дайте в СИ.

9. Пучок электронов, направленный параллельно обкладкам плоского конденсатора, на пути $l = 4$ см отклоняется на расстояние $x = 2$ мм от первоначального направления. Какую скорость имеют электроны? Напряженность электрического поля в конденсаторе $E = 22\,500$ В/м. Отношение заряда электрона к его массе $e/m = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг. Ответ дайте в км/с.

10. Определите энергию фотона рентгеновского излучения с длиной волны $\lambda = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ нм (1 нм $= 10^{-9}$ м). Ответ дайте в СИ, разделив результат на 10^{-13}. Постоянная Планка $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

Вариант 2

1. Тело, брошенное вертикально вверх, упало на землю через $t = 4$ с. С какой начальной скоростью было брошено тело? Ускорение силы тяжести $g = 9{,}8$ м/с². Ответ дайте в СИ.

2. Через блок, массой которого можно пренебречь, перекинута нить, на которой висят две гири с массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 6$ кг. Найдите натяжение нити. Ускорение силы тяжести $g = 9{,}8$ м/с². Ответ дайте в СИ.

3. Чему равно изменение кинетической энергии тела массой $m = 4$ кг, если его скорость увеличилась с $v_1 = 2$ м/с до $v_2 = 3$ м/с? Ответ дайте в СИ.

4. Какую работу совершает человек при подъеме груза массой $m = 2$ кг на высоту $h = 2$ м с ускорением $a = 3$ м/с²? Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с². Ответ дайте в СИ.

5. При нагревании идеального газа на $\Delta T = 1$ К при постоянном давлении его объем увеличился на $\alpha = 1/100$ первоначального объема. Найдите начальную температуру газа. Ответ дайте в СИ.

6. Для расплавления $m = 15$ кг стали потребовалось израсходовать количество теплоты $Q = 24 \cdot 10^6$ Дж. Определите КПД печи, если начальная температура слитка $t = 20$ °C, а температура плавления $t_{пл} = 1300$ °C. Удельная теплоемкость стали $c = 460$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления $\lambda = 2{,}7 \cdot 10^5$ Дж/кг. Ответ дайте в процентах.

7. Расстояние между пластинами плоского конденсатора $d = 4$ см, разность потенциалов между ними $U = 12$ В. Какую скорость получит электрон под действием поля, пройдя по силовой линии расстояние $l = 6$ мм? Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг. Ответ дайте в СИ, разделив результат на 10^5.

8. Две дуговые лампы и добавочное сопротивление соединены последовательно и включены в сеть с напряжением $U_0 = 110$ В. Найдите величину добавочного сопротивления, если падение напряжения на каждой лампе $U = 40$ В, а ток в цепи $I = 15$ А. Ответ дайте в СИ.

9. Определите силу, действующую на проводник длиной $l = 10$ см при токе $I = 10$ А в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}12$ Тл, если угол между проводником и магнитной индукцией равен 90°. Ответ дайте в СИ.

10. Человек видит свое изображение в плоском зеркале. На какое расстояние нужно передвинуть зеркало, чтобы изображение сместилось на $l = 1$ м? Ответ дайте в СИ.

Публикацию подготовили *М. Ю. Дигилов, О. Н. Дьяченко, Е. А. Шведов*

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\frac{3x-1}{x-4}+\frac{x-2}{2x-13}=1.$$

2. Решите неравенство

$$(x-3)\sqrt{x^2-x-2}\geqslant 0.$$

3. Решите уравнение

$$\sin 3x \sin(\pi+3x)=\cos 2x \cos(\pi-2x).$$

4. Решите неравенство

$$\log_{(3x-5)}4-\log_{(-6x-2)}16\geqslant 0.$$

5. В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE. Найдите отношение площадей треугольников ABC и AED, если $AB=6$, $AC=5$, $CB=7$.

6. Для каждого значения параметра a найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\sqrt{4x+a}+1\geqslant 2x.$$

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})-2(x-2)^2=0.$$

2. Решите неравенство

$$x^2-4\left(\sqrt{-x-\frac{1}{4}}\right)^2>0.$$

3. Решите уравнение

$$\cos 9x-\cos 7x-\cos(\pi+3x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=0.$$

4. Решите неравенство

$$\log_5(x^2-9x+20)\cdot\log_{5-x}25\geqslant\frac{\log_5 10-1}{\log_{25}(5-x)}.$$

5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BD и AE. Найдите отношение площадей треугольников ABC и BDE, если $AB=5$, $BC=8$, $AC=7$.

6. Для каждого значения параметра a найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$|x+1|+2a|1-2x|=3/2.$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. После прекращения действия силы, удерживающей пробковый шарик на глубине $H=1$ м, шарик вынырнул из воды и поднялся на высоту $h=0{,}5$ м над поверхностью. Определите среднюю силу сопротивления воды движению шарика. Сопротивление воздуха не учитывать. Масса шарика $m=100$ г, плотность пробки $\rho=200$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в=1000$ кг/м^3.

2. Два спутника движутся в одном направлении по круговым орбитам, лежащим в одной плоскости, со скоростями $v_1=7{,}8$ км/с и $v_2=7{,}6$ км/с. Определите минимальное расстояние между спутниками и промежуток времени, через который они вновь будут находиться на этом же расстоянии. Радиус Земли принять равным $R=6400$ км.

3. Математический маятник совершает колебания. В положении наибольшего отклонения ускорение грузика маятника в 20 раз больше, чем в момент прохождения положения равновесия. Найдите угол максимального отклонения маятника.

4. Открытую с обеих сторон узкую цилиндрическую трубку длиной $l=1{,}25$ м погружают до половины в ртуть. Затем закрывают верхнее отверстие трубки и вынимают ее из ртути. При этом в трубке остается столбик ртути длиной $h=27$ см. Чему равно атмосферное давление? Плотность ртути $\rho=13\,600$ кг/м^3.

5. Два заряженных шарика, массы которых $m_1=0{,}2$ г и $m_2=0{,}8$ г и заряды $q_1=3\cdot10^{-7}$ Кл

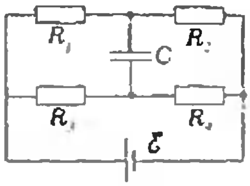


Рис. 1.

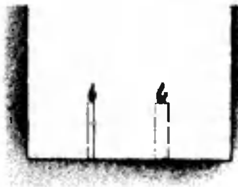


Рис. 2.

и $q_2=2\cdot10^{-7}$ Кл, соединены легкой непроводящей нитью длиной $l=20$ см и движутся вдоль силовой линии однородного электрического поля напряженностью $E=10^4$ Н/Кл. Вектор напряженности электрического поля направлен вертикально вниз. Определите ускорение шариков и натяжение нити.

6. Математический маятник представляет собой шарик массой $m=1$ г и зарядом $q=10^{-5}$ Кл, подвешенный на легкой непроводящей нити. Определите, во сколько раз изменится период колебаний этого маятника, если его поместить в однородное электрическое поле напряженностью $E=5\cdot10^5$ Н/Кл, направленное: а) вертикально вниз; б) вертикально вверх; в) горизонтально.

7. Определите заряд конденсатора в электрической цепи, показанной на рисунке 1, где $R_1=20$ Ом, $R_2=30$ Ом, $R_3=10$ Ом, $R_4=40$ Ом, $\mathscr{E}=10$ В, $r=0$, $C=2$ мкФ.

8. Мотор лифта питается от источника постоянного тока с ЭДС $\mathscr{E}=240$ В и внутренним сопротивлением $r=0{,}2$ Ом. Определите скорость подъема лифта, если его масса $m=500$ кг, сопротивление обмотки мотора $R=0{,}6$ Ом, сила тока в цепи $I=50$ А. Определите также ЭДС электромагнитной индукции, возникающей в обмотках мотора при его вращении. Механическими потерями пренебречь.

9. Протон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B=0{,}4$ Тл под углом $\alpha=30°$ к направлению поля и движется по винтовой линии радиусом $R=0{,}5$ см. Найдите кинетическую энергию протона (масса протона $m=1{,}67\cdot10^{-27}$ кг, заряд $q=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл).

10. Две свечи, высоты которых одинаковы и равны $h=10$ см, находятся на некотором расстоянии друг от друга (рис. 2). Расстояние от каждой свечи до ближайшей стены комнаты такое же, как между свечами. С какой скоростью движутся тени от свечей по стенам, если одна свеча сгорает за 10 мин, а другая — за 20 мин?

Публикацию подготовили *В. В. Варфоломеев, М. Н. Данилычева, И. М. Матусевич*

Новые книги издательства «Наука»

Ответы, указания, решения

Сплетение скрещивающихся прямых

1. $-1,\ 1,\ -1$.
2. Коэффициенты противоположны.
4. Первую прямую можно выбрать p способами, после чего вторую придется выбирать из $p-1$ прямых, затем третью — из $p-2$ прямых. Действуя так, мы выбираем упорядоченную тройку, и выбор можно произвести $p(p-1)(p-2)$ способами. При этом каждая неупорядоченная тройка получится 6 раз (так как тройка упорядочивается шестью способами: при ее упорядочении первая прямая выбирается из трех прямых, вторая — из двух оставшихся, а третья определена выбором первых двух).
5. Ясно, что одно из чисел p, $p-1$, $p-2$ делится на 3. При сокращении на 3 степень двойки, на которую делится сокращаемый сомножитель, не изменяется. Если p четно, то и $p-2$ четно, и числитель рассматриваемой дроби делится на 4 (и даже на 8), а вся дробь четна. Если p нечетно, то из сомножителей числителя четен только средний. Если p при делении на 4 дает остаток 1, то средний сомножитель делится на 4 и вся дробь четна. Если же p при делении на 4 дает остаток 3, то средний сомножитель не делится на 4 (он делится только лишь на 2), и дробь нечетна.

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Вариант 1

1. $\{\arcsin 3/4;\ \arcsin(-1/3);\ \pi-\arcsin 3/4\}$. Указание: уравнение $\arcsin f(x)=g(x)$ равносильно системе $f(x)=\sin g(x)$, $-\pi/2\leqslant g(x)\leqslant\pi/2$.
2. $(0;\ 1/2)\cup(1;\ 4)\cup(32;\ \infty)$.
3. $3\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)R^2/8$. Указание. Пусть O — центр окружности, а проходящие через K и L прямые, параллельные AM, пересекают прямую OM в точках D и N соответственно. Тогда $\angle DMK=30^\circ$, $\angle KOD=60^\circ$, поэтому $OD=\frac{1}{2}R$, $DN=NM=\frac{3}{4}R$, $ON=\frac{1}{4}R$, $NL=\frac{\sqrt{15}}{4}R$. Площадь треугольника MDK равна разности площадей трапеции $AMDK$ и треугольника MDK.
4. $a\in[-7/2;\ 1]$. Указание. Множество решений системы содержит отрезок AB тогда и только тогда, когда оно содержит точки A и B.
5. $1/12$. Указание. Если O — центр куба, K — середина отрезка $B'M$, N — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на $B'M$, то KN — искомое расстояние.

Вариант 2

1. $(32n+m)\pi/8$, $m=-1,\ 2,\ 3,\ 7,\ 10,\ 11$, $n\in\mathbb{Z}$.
2. $(-3;\ (3-\sqrt{17})/4)\cup(0;\ 1)\cup[(3+\sqrt{17})/4;\ \infty)$.
3. $384/25$. Указание. $AB=24/5$. Пусть O_1 и O_2 центры окружностей радиусами 3 и 4; AH, O_1K, O_2L — перпендикуляры, опущенные на CD. Тогда $KL=\frac{1}{2}CD=4$. Проведем прямую O_1N, параллельную CD; треугольник O_1O_2N подобен треугольнику ABH, откуда $AH=\frac{96}{25}$, а площадь треугольника ACD равна $\frac{1}{2}CD\cdot AH=\frac{384}{25}$.
4. $y=-2x+6$. Указание. Если $(x_0;\ y_0)$ — координаты точки A, то $y_0=-x_0^2+2x_0+2$, $-x_0(-2x_0+2)=2y_0$, $x_0>0$, $y_0>0$.
5. $\operatorname{arctg}\sqrt{5}$. Обозначим через M и N середины ребер AC и SB. N_1, N_2 — точки, симметричные точке N относительно биссекторных плоскостей, делящих угол между плоскостями ABC и ABS пополам. Плоскость MNN_1 не пересекает прямую AB. Плоскость MNN_2 образует с плоскостями ABC и ABS угол $\operatorname{arctg}\sqrt{5}$.

Вариант 3

1. $\{1,\ (\sqrt{183}-1)/13\}$.
2. $x_1=k\pi$, $x_2=\pi(4n-1)/4$; $n,k\in\mathbb{Z}$.
3. 1.
4. 1,93 кг, 0,96 кг, 9,12 кг.
5. $\pi\sqrt{3}/3$.

Физика

Вариант 1

1. Газ просачивается сквозь поршень до тех пор, пока его давление по обе стороны не станет одинаковым. Тогда при сравнении сил, действующих на поршень, его можно не учитывать. Тем самым, задача свелась к совсем простой: в одном отсеке давление равно нулю, а в другом — длиной $(L+x)$ — оно равно p'. По закону Бойля — Мариотта $p'(x+L)=pL$. Из условия равновесия поршня $F=p'S$. Отсюда получаем:

$$x=L(pS/F-1)\ \text{при}\ pS/2<F<pS;$$
$$x=0\ \text{при}\ pS\leqslant F;$$
$$x=L\ \text{при}\ pS/2\geqslant F.$$

2. См. решение задачи Ф1094, которое будет опубликовано позже.
3. См. решение задачи Ф1096, которое будет опубликовано позже.
4. Бег — последовательность фаз полета после толчков ног. Если считать (в грубой модели), что характер толчка со временем не изменяется, то дальность полета между толчками $s\sim 2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha/g_Л$ и время полета $t\sim 2v_0\sin\alpha/g_Л$. Отсюда средняя скорость $v=s/t\sim v_0\cos\alpha$ не зависит от ускорения свободного падения, т. е. скорость бега на Луне по порядку величины должна быть близкой к скорости на Земле. (Результат можно увидеть сразу, так как горизонтальная составляющая скорости, если не учитывать особенности толчков, не должна зависеть от ускорения свободного падения.)
5. В бутылке без трубочки вода при вытекании образует разреженную область вверху, которая препятствует вытеканию. Оно продолжится только после того, как через воду «пробулькнет» пузырек воздуха, выравнивающий давление с атмосферным. В результате вода из этой бутылки вытекает медленнее, чем из другой, где трубочка обеспечивает постоянное нормальное давление над водой (хотя и уменьшает несколько площадь, через которую вытекает вода, проходя через горлышко бутылки).

Вариант 2

1. Сила трения ($\mu mg\cos\alpha$) направлена против равнодействующей сил тяжести и внешней ($\sqrt{F_{\min}^2+(mg\sin\alpha)^2}$). Приравнивая силы, получаем

$$F_{\min}=mg\sqrt{\mu^2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} \text{ при } \mu\geqslant \operatorname{tg}\alpha,$$
$$F_{\min}=0 \text{ при } \mu<\operatorname{tg}\alpha.$$

2. Из закона сохранения заряда $2CU=Q_1+Q_2$, из равенства разностей потенциалов на обкладках конденсаторов $Q_1/(2C)=Q_2/C$ и из закона сохранения энергии $2\frac{Mv^2}{2}=2\frac{CU^2}{2}-\left(\frac{Q_1^2}{2(2C)}+\frac{Q_2^2}{2C}\right)$ имеем

$$v=\sqrt{\frac{CU^2}{3M}}.$$

3. Из условия равновесия для левого поршня давление p_1 слева и справа от него должно быть одним и тем же. Тогда и объемы в левом и правом отсеках до начала конденсации пара должны быть одинаковыми. Таким образом, пока $p_1\leqslant 2p_0$, длина каждого отсека равна $(2L-a)/2=L-a/2$ и смещение левого поршня

$$x=a/2 \text{ при } a\leqslant L.$$

При дальнейшем вдвигании правого поршня пары воды конденсируются, и давление, одинаковое в обоих отсеках, будет постоянным и равным $2p_0$. Значит, и расстояние между поршнями l будет постоянным и равным $L/2$ (по закону Бойля — Мариотта $p_0L=2p_0l$, откуда $l=L/2$). Отсюда (объемом сконденсировавшейся воды пренебрегаем)

$$x=2L-a-L/2=3L/2-a \text{ при } L\leqslant a\leqslant 3L/2.$$

Наконец,

$$\text{при } a>3L/2 \; x=L.$$

4. Работа против сил сжатия лезвия топора F на пути s (размер обуха) равна $Fs\sim mv^2/2$, где m — масса топора, v — его скорость. Будем считать, что топор, как и руки, движется примерно с той же скоростью, что и ноги при беге. Таким образом,

$$F\sim mv^2/(2s)\sim 5\cdot 10^3 \text{ Н}$$

при $m\sim 1$ кг, $s\sim 10^{-2}$ м и $v\sim 10$ м/с.

5. См. решение задачи Ф1102, которое будет опубликовано позже.

Вариант 3

1. Из уравнения Менделеева — Клапейрона для одного моля газа — $pV=RT$ — следует, что угол наклона α изохоры к оси температур таков, что $\operatorname{tg}\alpha=p/T=R/V$. Таким образом, максимальный наклон соответствует минимальному объему и наоборот:

$$V_{\min}=RT_1/p_2,\; V_{\max}=RT_2/p_1.$$

2. Пусть на обкладке конденсатора окажется заряд q, тогда на шаре остается заряд $Q-q$, на другой обкладке возникнет заряд $Q-q$, а на шаре радиусом R — заряд $+q$ (из закона сохранения заряда). Приравнивая разности потенциалов между обкладками конденсатора и между шарами, получаем

$$4\pi\varepsilon_0 q/C=(Q-q)/r-q/R,$$

откуда

$$q=\frac{Q}{1+r(1/R+4\pi\varepsilon_0/C)}.$$

3. Так как скорость v бусинки постоянна, сила трения μN уравновешивает «скатывающую» силу $mg\sin\alpha$. Из второго закона Ньютона получаем

$$\left(\frac{mv^2\cos^2\alpha}{R}\right)^2+(mg\cos\alpha)^2=N^2=\left(\frac{mg\sin\alpha}{\mu}\right)^2.$$

Отсюда

$$v=\frac{\sqrt{Rg}}{\cos\alpha}\left(\left(\frac{\sin\alpha}{\mu}\right)^2-\cos^2\alpha\right)^{1/4} \text{ при } \operatorname{tg}\alpha>\mu.$$

4. Грубая оценка по порядку величины из закона сохранения энергии дает: $mv_{\text{ц.т}}^2/2+mgl/2\sim Fh$, где $F\sim(M_{\text{чел}}/2)g$ — сила давления одной ноги стоящего человека. Отсюда $v_{\text{ц.т.}}\sim\sqrt{(Mh/m-l)g}$, $v_{\text{т}}/v_{\text{ц.т}}=2$ (так как $v=\omega r$), т. е.

$$v_{\text{т}}\sim 2\sqrt{(Mh/m-l)g}\sim 15 \text{ м/с}$$

при $M/m\sim 70$, $h\sim 0{,}1$ м, $l\approx 1{,}5$ м, $g=10$ м/с^2.

5. Вначале быстро разогреваются тонкие стенки металлического сосуда, и объем его увеличивается, поэтому уровень жидкости понижается. Затем прогревается сама жидкость, ее объем растет, и уровень в трубке повышается.

Московский инженерно-физический институт

Математика

Вариант 1

1. $x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{2}{3}+\pi n,\; n\in\mathbf{Z}$.

2. $(2m+1+\sqrt{4m^2+1})/4$.

3. $\left[1;\,1+\log_{\frac{1}{2}}^2\frac{c+1}{c+2}\right)$ при $c\in]-\infty;\,-2[\cup[1;\,\infty)$ при $c\in[-2;\,\infty)$.

4. $\frac{\pi h^2}{4}\left(\frac{3\operatorname{ctg}\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha+1}\right)$, $\pi h^2\left(\frac{1-\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}\right)\operatorname{ctg}^2\alpha$ при $\frac{\pi}{4}<\alpha<\operatorname{arcctg}1/3$; $\pi h^2\left(\frac{1-\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}\right)\operatorname{ctg}^2\alpha$ при $\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Указание. Пусть ASB — осевое сечение пирамиды, проходящее через середины ребер PT и QR, $AB=a$, $\angle ABS=\varphi$, C — центр вписанного в пирамиду шара, r — его радиус, Π_1 и Π_2 — прямые, по которым возможные секущие плоскости пересекают вписанный шар (рис. 1). Тогда $h=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\varphi$, $r=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cos\varphi=\operatorname{ctg}\alpha$. Вычисляя $r_1=C_1E$ и $r_2=C_2O$ и учитывая, что при $2r<h/2$, т. е. при $4\operatorname{tg}\varphi/2<\operatorname{tg}\varphi$ или $0<\operatorname{ctg}\alpha<\frac{1}{3}$, плоскость π_1 не пересекается с вписанным шаром, получаем ответ.

Вариант 2

1. $[2;\,3)\cup(3;\,7/2]\cup\{4\}$.

2. $3(10-p)/(2p-10)$ при $p\in[50/7;\,10]$.

3. $\{\pi+4\pi n;\,2\pi k\}$, $k, n\in\mathbf{Z}$ при $a\in[-1;\,3]$. Указание. Из второго уравнения следует, что $\sin x/2=1$, $\cos y=1$.

4. $R=\frac{d}{2\sin\alpha|\cos 2\alpha|}$, $R=\frac{d}{2\sin\alpha}$, если $\alpha\neq$

$\neq \frac{\pi}{4}$; $R = \frac{d}{\sqrt{2}}$, если $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Рассмотрим осевое сечение пирамиды (рис. 2 и 3). По условию задачи точка P лежит на высоте пирамиды SO или на ее продолжении, но не совпадает с точкой S, так как $d>0$. Обозначим $AD=a$, $SO=h$. Тогда $AO=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $h=\frac{a\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{2}}$. Точка P может лежать или выше основания пирамиды (может быть, даже выше точки S), или ниже этого основания. Поэтому или $AE\perp SC$, или $AE\perp SA$. Из $\triangle AOP$ получаем $OP=\frac{a\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}$, $AP=\frac{a}{\sqrt{2}\cos\alpha}$.

В зависимости от положения точки P имеем: или $d=|AE-AP|=\left|a\sqrt{2}\cos\alpha-\frac{a}{\sqrt{2}\cos\alpha}\right|=$ $=\frac{a|\cos 2\alpha|}{\sqrt{2}\cos\alpha}$, или $d=AP=\frac{d}{\sqrt{2}\cos\alpha}$, т. е. или $a=\frac{d\sqrt{2}\cos\alpha}{|\cos 2\alpha|}$, или $a=d\sqrt{2}\cos\alpha$. Но во всех случаях $2R=h+x=\frac{a}{\sqrt{2}}(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)=\frac{a\sqrt{2}}{\sin 2\alpha}$, и потому либо $R=\frac{d}{2\sin\alpha|\cos 2\alpha|}$, либо $R=$ $=\frac{d}{2\sin\alpha}$.

Физика

1. $v_{max}=\sqrt{\frac{m}{2k}\frac{a}{\cos\alpha}}=0{,}2$ м/с.
2. $\omega=\sqrt{\frac{g}{r}\frac{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}{\sin\alpha-\mu\cos\alpha}}=11$ с$^{-1}$.
3. $W=\frac{2q_2^2}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{8e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}=1{,}84\cdot 10^{-14}$ Дж.
4. $A=(p_0S+mg)\,h\,\frac{\Delta t}{(t+273)}=79$ Дж.
5. $B=\frac{U_2}{vl}(1+n)=0{,}25$ Тл.
6. $\frac{q}{m}=\frac{8U}{B^2l^2}=1\cdot 10^8$ Кл/кг.
7. $a=\frac{e}{m}\left(B\sqrt{\frac{2eEh}{m}}-E\right)=1\cdot 10^{12}$ м/с^2.
8. $v=\sqrt{2gh(1-\cos\alpha)-\frac{2BIlh\sin\alpha}{m}}=$ $=0{,}35$ м/с.
9. Можно, если конденсаторы соединить параллельно.
10. $Q=\frac{PL}{2R}=1{,}6$ Дж.

Московский институт стали и сплавов

Математика

1. 33. 2. 4,2. 3. 9. 4. 1,5. 5. 0,5. 6. 2. 7. 1. 8. −15. 9. 1,25. 10. 3. 11. 60. 12. 24.

Физика

Вариант 1

1. $v=2\pi nl=18{,}84$ м/с.
2. $F_{тр}=F=5$ Н $(F<F_{тр\,max}=\mu mg=9{,}8$ Н$)$.
3. $d_{max}=d/(1-0{,}8^2)=0{,}1$ м.
4. $V=m/\rho=0{,}012$ м^3.
5. $N=\Delta pV/(kT)=24\cdot 10^{20}$; ответ: 24.
6. $\alpha=(v^2/2-c\,(t_{пл}-t))/\lambda=0{,}89$.
7. $E=F/q=1$ В/м.
8. $R=16\rho m/(D\pi^2d^4)=0{,}016$ Ом.
9. $v=l\sqrt{\frac{e}{m}\frac{E}{2x}}\cdot 10^{-3}=3980$ км/с.
10. $W=hc/\lambda=4\cdot 10^{-13}$ Дж; ответ: 4 Дж.

Вариант 2

1. $v_0=gt/2=19{,}6$ м/с.
2. $T=2m_1m_2g/(m_1+m_2)=29{,}4$ Н.
3. $\Delta W_k=m(v_2^2-v_1^2)/2=10$ Дж.
4. $A=m(g+a)h=52$ Дж.
5. $T=\Delta T/\alpha=100$ К.
6. $\eta=\frac{(cm(t_{пл}-t)+\lambda m)}{Q}\cdot 100\,\%=53{,}7\,\%$.
7. $v=\sqrt{\frac{2eUl}{md}}=8\cdot 10^5$ м/с; ответ: 8 м/с.
8. $R=(U_0-2U)/I=2$ Ом.
9. $F=BIl=0{,}12$ Н.
10. $x=l/2=0{,}5$ м.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Математика

Вариант 1

1. $(-1;\ 31/5)$.
2. $(2;\ -1)\cup(3;\ \infty)$.

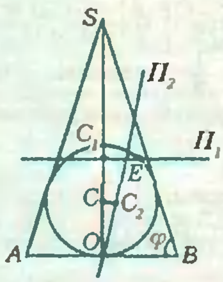


Рис. 1.

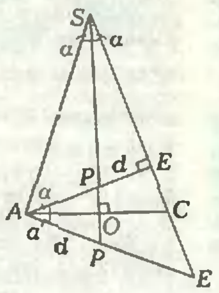


Рис. 2.

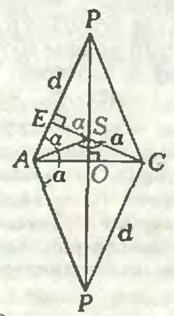


Рис. 3.

3. $x=\frac{\pi}{10}(2n+1),\ n\in Z$.
4. $[-3;\ -2)$.
5. $49/5$. Указание. $S_{ABC}/S_{AED}=BC/(AE\cos\beta)$.
6. При $a<-3$ — решений нет, $x=1$ при $a=-3$; $[(2-\sqrt{a+3})/2;\ (2+\sqrt{a+3})/2]$ при $a\in(-3;\ -2]$; $[-a/4;\ (2+\sqrt{a+3})/2]$ при $a>-2$. Указание. Рассмотрите графики функций $y=\sqrt{4x+a}$ и $y=2x-1$ и исследуйте их взаимное положение в зависимости от a.

Вариант 2

1. $[3;\ 5]$.
2. $(-\infty;\ -2-\sqrt{3})\cup(-2+\sqrt{3};\ -1/4]$.
3. $x_1=\pi k/5,\ x_2=\pi(2l+1)/6,\ k,l\in Z$.
4. $(-\infty;\ 3)$.
5. $3{,}9$. Указание. $S_{BDC}/S_{ABC}=DC/AC=8/13$.
6. $\{1/2\}$ при $a\in(-\infty;\ -1/4)$; $[1/2;\ \infty)$ при $a=-1/4$; $\{(4a-5)/(8a+2);\ 1/2\}$ при $a\in(-1/4;\ 1/4)$; $[-1;\ 3/2]$ при $a=1/4$; $\{1/2\}$ при $a\in(1/4;\ \infty)$. Указание. График левой части уравнения представляет собой ломаную, состоящую из двух лучей и отрезка, с вершинами в точках $(-1;\ 6a)$ и $(1/2;\ 3/2)$.

Физика

1. $F=mg\left(\frac{\rho_в}{\rho}-\frac{h}{H}-1\right)=3{,}5$ Н.

2. $\Delta R_{min}=gR^2\left(\frac{1}{v_2^2}-\frac{1}{v_1^2}\right)=352$ км; $\tau\approx 20$ ч.

3. $\alpha=2\,\mathrm{arctg}\,(1/40)\approx 3^\circ$.

4. $p_a=2\rho gh(l-h)/(l-2h)=10^5$ Па.

5. $a=g+E(q_1+q_2)/(m_1+m_2)=14{,}8$ м/с^2; $T=E(q_1m_2-q_2m_1)/(m_1+m_2)+q_1q_2/(4\pi\varepsilon_0 l^2)=15{,}5\cdot 10^{-3}$ Н.

6. а) $\frac{T}{T_0}=\sqrt{\frac{g}{g+qE/m}}=0{,}82$;

б) $\frac{T}{T_0}=\sqrt{\frac{g}{g-qE/m}}=1{,}42$;

в) $\frac{T}{T_0}=\sqrt{\frac{g}{\sqrt{g^2+q^2E^2/m^2}}}=0{,}95$.

7. $q=C\mathscr{E}\left(\frac{R_1}{R_1+R_2}-\frac{R_3}{R_3+R_4}\right)=4\cdot 10^{-6}$ Кл.

8. $v=\frac{\mathscr{E}I-I^2(R+r)}{mg}=2$ м/с; $\mathscr{E}_{инд}=\mathscr{E}-I(R+r)=200$ В.

9. $W=q^2B^2R^2/(2m\sin^2\alpha)=1{,}2\cdot 10^{-16}$ Дж.

10. $v_1=0$; $v_2=1{,}5$ см/мин.

Калейдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 2)

Вопросы и задачи

1. За счет отражения света на границе вода — воздух.
2. Да, если изготовить изо льда собирающую линзу.
3. Лучи света слабо преломляются при переходе из воды в глаз и не дают резкого изображения на сетчатке.
4. Свет, отраженный от аквалангиста при больших углах падения лучей, испытывает полное внутреннее отражение от границы «вода — воздух». Свет же, отраженный от рыбака при любом угле падения, проходит в воду.
5. Показатель преломления вещества.
6. Со скоростью 4 м/с.
7. Из-за рассеяния света капельками воды в тумане.
8. См. рис. 4.

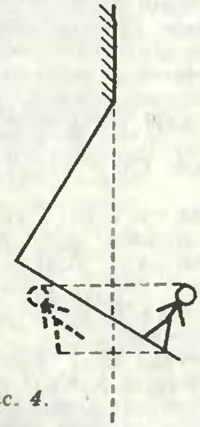


Рис. 4.

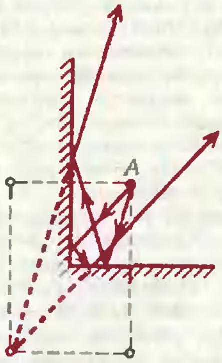


Рис. 5.

9. Многократным внутренним отражением лучей света, попавших в драгоценный камень.
10. Солнечный свет, рассеянный атмосферой, значительно ярче света звезд.
11. Три (см. рис. 5).
12. Щурясь, люди как бы уменьшают «диафрагму» зрачка, и изображение становится более резким.

Микроопыт

С помощью очков для дальнозорких можно сфокусировать, например, поток солнечного света, с очками для близоруких — нельзя.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 2)

1. Больше будет закрытая часть (см. рис. 6).
2. Последняя цифра числа A^3 зависит только от последней цифры числа A. Выпишем эти

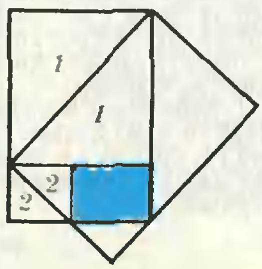


Рис. 6.

цифры в таблицу:

A	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A^3	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9

Из этой таблицы видна справедливость утверждения задачи.

3. Воздух является плохим проводником тепла. Распушая перья, птицы увеличивают слой воздуха между наружным воздухом и телом.

4. Запишем условие задачи: $700+10x+y=100x+10y+7+117$. Отсюда $90x+9y=576$ или $10x+y=64$. Значит, $x=6$, $y=4$, а искомое число — 764.

5. $763\times 852\times 941=611\ 721\ 516$.

Шахматная страничка
(см. «Квант», 1987, № 11, 12)

Задание 21 (С. Левман, 1938 г., переработка Я. Владимирова). Тема простого клапана в четырех вариантах. После **1. Kg8!** грозит 2. Kh6 и 3. Kf7×. Черные должны двигать пешки b7 и c7, подключая ладью для защиты седьмой горизонтали. Но при этом происходит перекрытие ладьи по другим горизонталям, что и решает дело. 1...**b6** 2. **Ke7!** (конь возвращается обратно) и 3. Kc6×; 1...b5 2. Лc3! и 3. Лc5×, 1...**c6** 2. **Ce7!** и 3. Cd6×, 1...**c5** 2. Лe8! и 3. Лd5×.

Задание 22 (Л. Вальве, 1944 г.). **1. c4!** с угрозой 2. K: a5 ba 3. c5×. Черная ладья пытается спасти короля: 1...Л:a4 2. Cc6! и 3. Лd7×, 1...Л:b3 2. Cd5! и 3. Лe6×, 1...Л:b5 2. Kd4. Лe5 3. Лd8×, 1...Л:c4 2. K:b6! Лc7 3. Лh6× (черный ладейный крест).

Задание 23 (Н. Григорьев, 1933 г.). **1. Крa1!!** (но не 1. Крb2? d4 2. Крc1 Крc3 3. Крd1 d3! 4. cd Кр:d3 и не 1. Крb1? Крc3! 2. Крc1 d4 3. Крb1 d3!) **1...Крc3** (если 1...d4, то 2. Крb2, а если 1..Крa3, то 2. Крb1 Крb4 3. Крc1!) **2. Крb1 Крb4** (2...d4 3. Крc1!) **3. Крc1!!** (но не 3. Крb2? d4!) **3...Крc3** (3...d4 4. Крd2) **4. Крd1!!** (но не 4. Крb1? Крb4! 5. Крc1 Крc3) **4...d4 5. Крc1 d3 6. cd Кр:d3** (если 6...Кр:b3, то 7. Крd2 с симметричной игрой) **7. Крb2 Крd4 8. Крa3 Крc5 9. Крa4 Крb6 10. Крb4** с выигрышем. В этом этюде, как и в следующем, важны не только правильные ходы, но и ложные следы.

Задание 24 (Н. Григорьев, 1933 г.). **1. a4!** (но не 1. Крe8? Крc7 2. Крe7 b5! 3. Крe6 b4 4. ab cb 5. Крd5 a5! 6. Крc5 a4 или 4. a4 Крb6 5. Крd6 Крa5 6. Кр:c5 пат) **1...Крd7** (1...a5 2. Крe8 Крc7 3. Крe7 Крc6 4. Крd8) **2. a5! Крd6 3. Крf7** (но не 3. ab? Крc6 4. Крe7 Кр:b6 5. Крd6 Крa5! 6. Кр:c5 пат) **3...Крd7 4. Крf6! Крd6 5. Крf5 Крc7** (5...Крd7 6. Крc5 Крc6 7. Крe6 b5 8. Крe5! Крc7 9. Крd5 bc 10. bc Крd7 11. Кр:c5 Крc7 12. Крd5 и т. д.) **6. Крe6 Крc6 7. Крe7 Крc7 8. Крe8 Крc8** (8...Крc6 9. Крd8! ba 10. Крe7! Крc7 11. Крe6 Крc6 12. Крe5 Крc7 13. Крd5 Крb6 14. Крd6 Крb7 15. Кр:c5 Крc7 16. Крd5 Крd7 17. c5 Крc7 18. c6 Крd8 19. Крc4 Крc8 20. Крd4! — метод треугольника! — 20...Крd8 21. Крd5 Крc8 22. Крd6 Крd8 23. c7+ Крc8 24. Крc6) **9. ab Крb7 10. Крd7 Кр:b6 11. Крc8 Крc6 12. Крb8 Крb6 13. Крa8 a5 14. Крb8 a4! 15. ba Крa5 16. Крb7 Кр:a4 17. Крc6 Крb4 18. Крd5,** и белые выигрывают.

Сдано в набор 18.01.88. Подписано к печати 24.02.88.
Т-04594 Бумага 70×100/16. Печать офсетная
Усл. кр.-отт. 22,1 Усл. печ. л. 5,2 Уч.-изд. л. 6,85
Тираж 196 058 экз. Цена 40 коп. Заказ 51

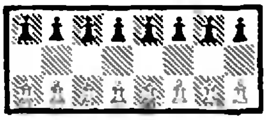
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-33-54

Шахматная страничка

ДВЕ ИГРЫ

В прошлый раз мы упомянули о шахматах Доусона, в которые играют на доске 3×8 одними пешками. Пешки ходят и бьют по обычным правилам, причем взятие обязательно. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход,— все его оставшиеся пешки запатованы.

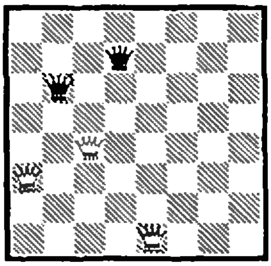


Пусть первый ход белых 1. a2, тогда черные вынуждены ответить 1...ba, и белые тоже 2. ba. Теперь вертикали «a» и «b» «вышли из игры», а ход черных. Если они играют 2...f2, то белые должны ходить 3. ef или 3. gf. После разменов от трех заполненных вертикалей «e», «f» и «g» остается лишь одна «f» с застопорившимися на ней пешками, а очередь хода снова за белыми. Итак, любой ход приводит к уменьшению числа вертикалей, на которых еще можно ходить, на 3, 2 или 1 (если соседние вертикали пусты) и передаче хода партнеру. Поэтому игру можно переформулировать так: *белые и черные по очереди ставят пешки на 2-ю горизонталь на поля, не граничащие с уже занятыми; кто не может сделать ход — проигрывает*. Дальше мы будем рассматривать игру в этой формулировке.

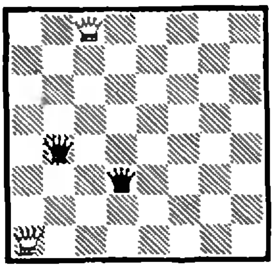
Надо сказать, что анализ игры на доске 3×n при произвольных значениях n представляет собой весьма сложную математическую проблему. Рассмотрим n от 1 до 8. При n=1 и n=2 победа за белыми (1. a2). Выигрывают они и при n=3 (1. b2, но не 1. a2? c2). При n=4 верх берут черные (1. a2 c2; 1. b2 d2). Легко проверить, что при следующих трех значениях n (n=5, 6, 7) снова побеждают белые, а при n=8 уже им не избежать поражения. Ввиду симметрии достаточно рассмотреть четыре «дебюта»: 1. a2 e2 2. g2 c2; 1. b2 f2! 2. d2 h2; 1. c2 e2 2. g2 a2; 1. d2 f2 2. a2 h2.

В принципе можно вывести рекуррентные соотношения для определения результата игры при различных значениях n, но простой формулы или правила, позволяющего выявить победителя при данном n, не существует. Еще сложнее анализ «мизерной» формы шахмат Доусона (именно ее первоначально предложил автор игры): проигрывает тот, кто делает последний ход.

Рассмотрим еще одну интересную шахматно-математическую игру, связанную со знаменитой «задачей о восьми ферзях». Два игрока по очереди ставят ферзей на вертикали «a», «b», «c» и т. д. Никакие два из них не должны бить друг друга (цвет ферзей не имеет значения). Проигрывает игрок, который не может сделать очередного хода.



В этой партии сделано 5 ходов — выиграл начинающий (все поля вертикали «f» контролируются уже выставленными ферзями).



Здесь сделано 4 хода — выиграл второй игрок (на вертикали «e» не осталось ни одного доступного поля). Кстати, это самая короткая партия.

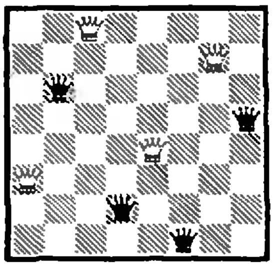
Интересен и такой вариант игры: игрок, сделавший последний ход, выигрывает столько очков, сколько свободных вертикалей осталось при этом на доске. При таком подходе в первом примере белые выиграли 3 очка, а во втором черные — 4.

Возникает вопрос: чем же завершается эта «игра ферзей» в каждом из двух ее вариантов? Полный перебор (около 7000 партий) был осуществлен на компьютере. И вот что оказалось.

В первом варианте «игры ферзей» у второго игрока имеется выигрышная стратегия, при наиболее упорном сопротивлении первого игрока партия заканчивается после восьмого хода.

Во втором варианте при наилучших действиях обоих игроков партия также длится восемь ходов и заканчивается вничью — выигрыш игрока, поставившего последнего ферзя, составляет 0 очков! (В терминах математической теории игр это означает, что цена игры равна 0.)

Вот один из примеров оптимальной (для обоих вариантов) партии.



Читателям предлагается рассмотреть «игру ферзей» на доске n×n. Можно высказать гипотезу, что в первом варианте игры на нечетных досках побеждают белые, а на четных — черные. Во втором варианте партия вновь заканчивается вничью (нулевой выигрыш). При этом, если кто-то из игроков отклонится от расстановки n не угрожающих друг другу ферзей на доске n×n, то он должен проиграть.

Е. Я. Гик

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Как соединить крест-накрест три бруска? Задачу эту приходилось решать нашим предкам еще в глубокой древности, когда они начали строить первые жилища. С тех пор изобретены сотни различных способов: бруски связывают, зацепляют, сколачивают, свинчивают, склеивают, сваривают. Некоторые соединения, придуманные очень давно, так оригинальны и остроумны, что превратились в занимательные головоломки. Две из них мы предлагаем читателям. В первом варианте крест собирается из трех брусков с различной конфигурацией вырезов; на рисунке они показаны слева. Секрет в том, что один из брусков может поворачиваться вокруг продольной оси. За счет этого и удается собирать и разбирать узел. Во втором варианте крест составляется из трех одинаковых брусков (рисунок справа вверху). Но как бы мы ни складывали два из них, третий к ним присоединить невозможно. Поэтому надо одновременно сдвигать все три бруска к центру узла. Элементы головоломок нетрудно сделать самим из деревянных брусков квадратного сечения. Вырезы в брусках нужно сделать точно и аккуратно — только в этом случае собранный узел будет прочным. В заметках о головоломках, которые мы регулярно публикуем с прошлого года, в основном рассказывалось о устройстве головоломок и об алгоритмах решения. Можно сказать, что обсуждались задачи из «алгебры головоломок». Сейчас мы предлагаем читателям задачу из «геометрии головоломок». Попробуйте придумать способ крестообразного соединения трех круглых брусков с вырезами. Предложенные выше конструкции вырезов для этого не годятся. Узел должен быть сборно-разборным, состоять из трех элементов и иметь вид, показанный на рисунке справа, без дополнительных видимых линий разреза. Из различных решений лучшим считается то, при котором внутри узла окажется меньше пустого места. Признаемся, что нам неизвестно, разрешима ли эта задача.

А. К.